

SÉRIE A, N° 2122

N° D'ORDRE :

2991

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

HENRY **BERTHOMIEU**

1^{re} THÈSE. — LES ÉTOILES DOUBLES SPECTROSCOPIQUES ET LA RELATION MASSE-LUMINOSITÉ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 Décembre 1945 devant la Commission d'examen.

MM. ESCLANGON, *Président*

CHAZY,

CROZE,

} *Examineurs*



TOULOUSE

ÉDOUARD PRIVAT, Libraire-Éditeur

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS, 14

1947

SÉRIE A, N° 2122

N° D'ORDRE :

2991

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

HENRY BERTHOMIEU

1^{re} THÈSE. — LES ÉTOILES DOUBLES SPECTROSCOPIQUES ET LA RELATION MASSE-LUMINOSITÉ.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 7 Décembre 1945 devant la Commission d'examen.

MM. ESCLANGON, *Président*

CHAZY,

CROZE,

} *Examineurs*



TOULOUSE

ÉDOUARD PRIVAT, Libraire-Éditeur

Librairie de l'Université

14, RUE DES ARTS, 14

1947

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. Paul MONTEL.

Professeurs :

P. MONTEL.....	T Théorie des Fonctions.	DUPONT.....	T Théories chimiques.
L. BLARINGHEM	T Botanique.	LANQUINE.....	T Géologie structurale et Géologie appliquée.
G. JULIA.....	T Analyse supérieure et Al- gèbre supérieure.	VALIRON.....	T Calcul différentiel et Cal- cul intégral.
C. MAUGUIN.....	T Minéralogie.	BARRABÉ.....	Géologie structurale et Géologie appliquée.
A. MICHEL-LÉVY	T Pétrographie.	F. PERRIN.....	T Théories physiques.
A. DENJOY.....	T Géométrie supérieure.	VAVON.....	T Analyse et mesures chi- miques.
L. LUTAUD.....	T Géographie physique et Géologie dynamique.	G. DARMOIS.....	T Mathématiques générales.
E. DARMOY.....	T Enseignement de Phy- sique.	CHATTON.....	T Biologie maritime.
A. DEBIERNE.....	T Electronique et Radio- activité.	AUBEL.....	Chimie biologique.
M. JAVILLIER.....	T Chimie biologique.	Jacques BOURCART	Géographie physique et Géologie dynamique.
Robert LÉVY.....	T Physiologie comparée.	M ^{me} JOLIOT-CURIE.	Physique générale et Ra- dioactivité.
Henri VILLAT.....	T Mécanique des fluides et applications.	PLANTEFOL.....	T Botanique.
Ch. JACOB.....	T Géologie.	CABANNES.....	T Recherches physiques.
P. PASCAL.....	T Chimie générale.	GRASSE.....	T Zoologie (Evolution des êtres organisés).
M. FRÉCHET.....	T Calcul des probabilités et Physique mathématique.	PRÉVOST.....	Chimie organique.
E. ESCLANGON.....	T Astronomie.	BOULIGAND.....	Mathématiques.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T Chimie organique.	CHAUDRON.....	Chimie.
H. BÉGHIN.....	T Mécanique physique et ex- périmentale.	WYART.....	Minéralogie.
FOCH.....	T Mécanique expérimentale des fluides.	TEISSIER.....	T Zoologie.
PAUTHENIER.....	T Electrotechnique générale.	MANGENOT.....	T Biologie végétale (P.C.B.)
DE BROGLIE.....	T Théories physiques.	P. AUGER.....	T Physique quantique et re- lativité.
CHRÉTIEN.....	Optique appliquée.	MONNIER.....	Physiologie générale.
JOB.....	Chimie générale.	PIVETEAU.....	Géologie.
PRENANT.....	T Anatomie et Histologie comparées.	ROCARD.....	Physique.
VILLEY.....	Mécanique appliquée.	H. CARTAN.....	Calcul différentiel.
COMBES.....	T Physiologie végétale.	SCHAEFFER.....	T Physiologie des fonctions.
GARNIER.....	T Application de l'analyse à la Géométrie.	LAFFITTE.....	Chimie (P. C. B.).
PÈRES.....	T Mécanique rationnelle.	LERAY.....	Mécanique théorique des fluides.
HACKSPILL.....	T Chimie minérale.	FAVART.....	Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
LAUGIER.....	T Physiologie générale.	COULOMB.....	T Physique du Globe.
TOUSSAINT.....	Technique Aéronautique.	M ^{lle} COUSIN.....	Biologie animale (P.C.B.)
M. CURIE.....	Physique (P. C. B.).	CHRÉTIEN.....	Analyse et mesures chi- miques.
G. RIBAUD.....	T Hautes températures.	DRACH.....	Evolution des êtres orga- nisés.
CHAZY.....	T Mécanique analytique.	CHATELET.....	T Arithmétique et Théorie des nombres.
GAULT.....	T Chimie (P. C. B.).	EPHROSSI.....	T Génétique.
GROZE.....	T Physique théorique et Phy- sique céleste.	WURMSER.....	T Biologie physico-chimique.
		KASTLER.....	Physique.
		RIVIÈRE.....	Géologie.
		BAUER.....	T Chimie-Physique.

Secrétaire CH. MONIER



A LA MÉMOIRE DE MA MÈRE

A MON PÈRE

A MONSIEUR GEORGES DURAND

LES ÉTOILES DOUBLES SPECTROSCOPIQUES

ET

LA RELATION MASSE-LUMINOSITÉ

PAR

HENRY BERTHOMIEU

INTRODUCTION

1. « Dans tout le domaine couvert par l'observation, la Théorie d'EDDINGTON représente la relation empirique entre masse et magnitude absolue avec une précision comparable à celle des meilleures observations; de sorte que, même si la loi masse-luminosité n'avait qu'une valeur statistique — ce qui n'est pas du tout notre opinion — nos résultats numériques resteraient inchangés ».

Ainsi s'exprime RUSSELL dans le Mémoire classique où il crée les parallaxes dynamiques des étoiles doubles⁽¹⁾. Le succès remarquable de cette première application, qui suivait d'assez près la parution de l'Ouvrage fondamental d'EDDINGTON⁽²⁾, témoigne de l'importance déjà prise par la relation masse-luminosité; et les nombreux travaux qu'elle a suscités depuis lors n'ont fait que confirmer le bien-fondé de l'opinion de RUSSELL. S'il est maintenant reconnu que les théories d'Astrophysique sur lesquelles s'appuient les formules d'EDDINGTON doivent être perfectionnées, il n'en demeure pas moins que *du point de vue numérique* ces formules, édifiées en accord avec la plupart des masses les mieux déterminées — même aujourd'hui — constituent, après les derniers travaux sur la question, « un instrument de calcul du même ordre de précision que les autres modes d'investigation

1. H. N. RUSSELL, *On the determination of dynamical parallaxes* (Astronomical Journal, vol. 38, n° 11, 1928, p. 95).

2. A. S. EDDINGTON, *The internal constitution of the stars* (Cambridge, University Press, 1926). Voir aussi *On the relation between the masses and luminosities of the stars* (Monthly Notices, vol. 84, 1924, p. 308) et l'Ouvrage en langue française de G. TIERCY, *L'équilibre radiatif dans les étoiles* (Paris, Gauthier-Villars, 1935).

actuellement connus »⁽³⁾. Aussi est-il du plus haut intérêt, après s'être assuré de la réalité de la relation et en avoir précisé les conditions d'emploi, de l'utiliser soit à vérifier certaines hypothèses couramment admises, soit à enrichir nos connaissances en Astronomie stellaire. L'objet du présent Mémoire est d'exposer, sous ces deux aspects, quelques applications nouvelles de la relation numérique dont nous admettons l'existence indépendamment des hypothèses théoriques qui ont été à son origine⁽⁴⁾.

2. Il est indispensable de rappeler tout d'abord quelques-uns des travaux déjà publiés sur la relation, à la fois pour montrer sa réalité et pour rattacher nos recherches à des résultats antérieurs, sur lesquels elles s'appuient.

Comme le laisse entendre RUSSELL, les premières tentatives de vérification étaient favorables à la relation. Mentionnons dans cet ordre d'idées les Mémoires de PEARCE⁽⁵⁾, MAC LAUGHLIN⁽⁶⁾, PITMAN⁽⁷⁾, qui consistent essentiellement en des discussions graphiques accompagnées de remarques : il s'agit de vérifications *qualitatives* sur lesquelles nous n'insisterons pas. Plus tard, divers Auteurs se défiant des formules proposées par EDDINGTON du fait que leur substratum astrophysique avait vieilli, se sont appliqués à construire une relation masse-luminosité à partir des seules données de l'observation⁽⁸⁾. Nous ne retiendrons de ces travaux que la conclusion : loin de contredire la relation d'EDDINGTON, les résultats issus de points de vue différents tendent à la confirmer selon le degré de précision du matériel utilisé.

Plus intéressantes sont les vérifications explicites de M. GEORGES DURAND : c'est la première fois, croyons-nous, que l'on tient compte systématiquement des erreurs sur les données d'observation pour discuter la relation numérique afin d'obtenir des résultats *quantitatifs* sur la précision. Ainsi, en utilisant les masses stellaires les mieux connues, l'Auteur montre d'abord qu'il n'y a pas lieu de modifier les valeurs

3. GEORGES DURAND, *Étude de la relation masse-luminosité d'Eddington* (Annales de l'Observatoire de Toulouse, t. XV, 1939, p. 117).

4. Ces applications ont fait l'objet de trois Communications à l'Académie des Sciences, qui résument respectivement les Chapitres I, II et III (*Comptes Rendus Acad. Sc.*, t. 215, 1942, p. 566; *Ibid.*, t. 216, 1943, pp. 472 et 872).

5. *Victoria*, t. III, 1926, p. 275;

6. *Astronomical Journal*, t. 38, 1927, p. 21;

7. *Ibid.*, t. 39, 1929, p. 57.

8. Voir, par exemple, P. P. PARENAGO, *The mass-luminosity relation* (*Astronomical Journal of Soviet Union*, vol. XIV, 1937, p. 33); G. P. KUIPER, *The empirical mass-luminosity relation* (*Astrophys. Journ.*, vol. 88, 1938, p. 472); J. GABOVITS, *On the empirical mass-luminosity relation* (*Publ. de l'Obs. astronomique de l'Université de Tartu*, t. XXX, 1938, p. 3); K. PIŁOWSKI, *Die Strahlungstemperaturen für die Hauptreihe des Russell-Diagramms* (*Zeitschrift für Astrophysik*, Bd II, 1936, p. 265).

numériques proposées par EDDINGTON⁽⁹⁾. L'application à un ensemble étendu d'étoiles doubles visuelles⁽¹⁰⁾ confirme ensuite l'accord entre l'observation et la relation d'EDDINGTON, *accord d'autant plus satisfaisant que les données sont plus précises*, en particulier la parallaxe. Par exemple, une orbite nouvelle substituée à une ancienne conduit en général à un écart moindre; de même, les parallaxes les plus récentes d'un couple améliorent l'accord.

A la suite de ces vérifications, une étude approfondie de la relation d'EDDINGTON s'imposait, tant pour systématiser l'ensemble de ses propriétés que pour en faciliter l'usage. Tel est l'objet du Mémoire cité au début de cet exposé, où M. G. DURAND fait l'étude intrinsèque de la relation numérique. On sait que celle-ci est constituée par un système de *deux* équations entre *trois* variables : masse, luminosité totale et température effective. Pratiquement, ce système est réductible à une relation unique, non linéaire, mais susceptible d'être mise sous une forme dite *linéarisée*, commode pour certains calculs et dont nous aurons à faire usage. Outre une méthode nouvelle de vérification, ce Mémoire donne le mode pratique d'utilisation de la relation et les Tables numériques calculées à cet effet⁽¹¹⁾.

3. Avant même que sa précision ait été l'objet d'une étude systématique, la relation masse-luminosité s'est révélée féconde en *applications pratiques*. La première et la plus connue est celle que nous avons déjà signalée, où RUSSELL a substitué les *parallaxes dynamiques* des étoiles doubles aux parallaxes dites *hypothétiques*. Depuis lors, la relation a été souvent appliquée aux différentes catégories d'étoiles doubles, notamment aux *variables à éclipses*, déjà utilisées par EDDINGTON dans l'exposé de sa Théorie⁽¹²⁾ : tandis que les recherches d'ELLSWORTH s'apparentent à des vérifications⁽¹³⁾, GAPOSCHKIN s'attache à déterminer les *dimensions absolues* des composantes⁽¹⁴⁾ et M. G. DURAND obtient des *parallaxes*, dont l'accord avec les valeurs trigonométriques ou spectroscopiques témoigne en faveur de la relation⁽¹⁵⁾.

9. G. DURAND, *Sur la précision de la relation masse-luminosité d'Eddington* (C.R. Acad. Sc., t. 200, 1935, p. 1915).

10. G. DURAND, *Détermination de masses d'étoiles doubles visuelles par la relation masse-luminosité, et discussion des valeurs obtenues* (Annales Obs. Toulouse, t. XIV, 1938, p. 5). Voir aussi C. R. Acad. Sc., t. 202, 1936, p. 1762.

11. On trouvera également, dans le Mémoire cité, une bibliographie complète des travaux publiés sur la relation masse-luminosité.

12. *Monthly Notices*, vol. 84, 1924, p. 317.

13. J. ELLSWORTH, *La relation masse-luminosité et les étoiles doubles à éclipses* (C. R. Acad. Sc., t. 199, 1934, p. 1378); *Étude physique de 27 systèmes doubles à éclipses* (Journal des Observateurs, vol. XXI, 1938, p. 1).

14. Serge I. GAPOSCHKIN, *A study of the absolute dimensions of eclipsing variables* (Proceedings of the American Philosophical Society, vol. 79, n° 3, sept. 1938).

15. G. DURAND, *Détermination de parallaxes d'étoiles doubles à éclipses par la relation masse-luminosité* (Bulletin Astronomique, t. XI, fasc. III, 1938, p. 137, et C. R. Acad. Sc., t. 206, 1938, p. 490).

Avec les *étoiles doubles spectroscopiques*, M. G. DURAND parvient à évaluer tous les éléments de l'orbite, sans hypothèse auxiliaire⁽¹⁶⁾ : nous reviendrons sur cette application, qui est à la base de nos recherches. Enfin, signalons les services que peut rendre la relation masse-luminosité dans les déterminations d'orbites de certains *couples visuels*, où elle lève l'ambiguïté qu'on rencontre parfois entre deux types d'orbites⁽¹⁷⁾.

4. Plus peut-être que les autres catégories d'étoiles doubles, les systèmes *spectroscopiques non photométriques* se présentent comme un domaine de recherches intéressantes *a priori*, lorsqu'on veut utiliser la relation masse-luminosité pour obtenir des résultats nouveaux. On sait en effet le peu de renseignements qu'apporte l'observation sur les éléments d'un tel couple : l'*inclinaison* i de l'orbite restant indéterminée, les *masses* individuelles, μ_1 et μ_2 , ne sont connues qu'à un facteur

près, $\sin^3 i$ (*masses minima*) ou par la seule combinaison $\frac{\mu_2^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$ (*fonction des masses*), suivant que les spectres des deux composantes, ou un seul, ont pu être observés; de même, on ne possède que les *demi-grands axes minima*, $a_1 \sin i$ et $a_2 \sin i$, des orbites absolues, ou seulement $a_1 \sin i$. Si l'on considère d'autre part, qu'un certain nombre de couples sont dépourvus de *parallaxe*, on voit que les données de l'observation amènent à distinguer quatre cas, qui donneront lieu à des problèmes différents dans l'application de la relation masse-luminosité :

- a. On connaît l'orbite avec les masses minima, et la parallaxe;
- b. On connaît l'orbite avec la fonction des masses, et la parallaxe;
- c. On connaît les masses minima, mais non la parallaxe;
- d. On connaît la fonction des masses, non la parallaxe.

Le Mémoire cité plus haut de M. G. DURAND concerne le cas *a*, le plus favorable à l'obtention de résultats précis, du fait que les données sont plus abondantes. Il est remarquable que ces données, jointes à la relation masse-luminosité, conduisent à un système d'équations en nombre égal à celui des inconnues à déterminer : magnitudes et masses des composantes, demi-grands axes et inclinaison; d'où la possibilité d'une détermination algébrique rigoureuse de ces quantités. Malheureusement, on ne dispose de données aussi complètes que pour 80 couples environ, soit une fraction d'environ 30 p. cent de la totalité des systèmes spectroscopiques à orbite connue. Il importait donc de rechercher, lorsque l'observation n'apporte pas tous les renseignements précédents, si la relation masse-luminosité ne pourrait être d'un

16. G. DURAND, *Détermination des éléments orbitaux des étoiles doubles spectroscopiques par la relation masse-luminosité* (Annales Obs. Toulouse, t. XI, 1935, p. 209, et C. R. Acad. Sc., t. 199, 1934, p. 1099).

17. G. DURAND, *L'orbite de l'étoile double O Σ 77 et la relation masse-luminosité* (C. R. Acad. Sc., t. 206, 1938, p. 1093); *L'étoile double ζ Herculis et la relation masse-luminosité* (Annales Obs. Toulouse, t. XVI, 1941, p. 271).

secours utile pour apprécier au mieux les éléments d'un couple spectroscopique. C'est ce que nous avons tenté de faire ici, en portant spécialement notre attention sur les cas *b* et *c*, qui sont les plus intéressants après *a* ⁽¹⁸⁾.

La difficulté commune aux problèmes posés par les cas autres que *a* consiste en ceci : le nombre des équations dont on dispose étant inférieur à celui des inconnues, la relation masse-luminosité ne permet pas de lever complètement l'incertitude due à l'inclinaison. A défaut de mieux, une étude préliminaire des *propriétés statistiques* de l'inclinaison s'avérerait indispensable avant d'aborder la détermination des masses et des magnitudes. Cette étude fait l'objet du Chapitre I. Elle nous a été rendue possible grâce aux inclinaisons calculées par M. G. DURAND avec la relation masse-luminosité (cas *a*) et, d'autre part, nous y étions naturellement conduit par les tentatives antérieures visant à déterminer les valeurs moyennes de *i* et de $\sin^3 i$ d'après des considérations théoriques de probabilité (SCHLESINGER, CAMPBELL). Il était donc intéressant de confronter les hypothèses proposées, avec les valeurs issues de la relation d'EDDINGTON. Parmi les résultats auxquels nous sommes parvenu, nous pouvons signaler les suivants :

1. *Considérant l'ensemble des étoiles doubles spectroscopiques, A ÉCLIPSES OU NON, la loi empirique de répartition des inclinaisons s'accorde de façon remarquable avec la loi théorique* déduite de l'hypothèse couramment adoptée, d'après laquelle les chances de découverte d'un système spectroscopique sont proportionnelles à la vitesse radiale, donc à $\sin i$. En particulier, nous vérifions la valeur moyenne $\sin^3 i = 0,68$, proposée par SCHLESINGER, et applicable à un ensemble de couples spectroscopiques contenant un pourcentage déterminé de variables à éclipses;

2. Nous établissons la *loi de répartition des inclinaisons des systèmes spectroscopiques NON PHOTOMÉTRIQUES* et nous donnons l'expression analytique de la probabilité élémentaire, d'après l'hypothèse ci-dessus, complétée par la condition géométrique de *non-éclipse*. Ici encore, l'accord est excellent entre la loi théorique et la loi empirique de répartition;

3. Du point de vue pratique, les constatations précédentes montrent que, *chez les couples spectroscopiques non photométriques, les inclinaisons s'accumulent au voisinage de la valeur moyenne* (égale à 56°), tandis qu'elles sont extrêmement rares à proximité des bornes (0° , 90°) de l'intervalle théorique : la répartition présente l'aspect d'une *courbe en cloche dissymétrique* à sommet bien caractérisé (type KARL PEARSON, CHARLIER). Ce résultat est important pour l'emploi du facteur $\sin^3 i$, dont nous déterminons la *valeur moyenne* et l'*écart probable* correspondant, qui ser-

18. Nous laissons de côté, dans ce Mémoire, l'éventualité la plus défavorable *d*, où les données sont trop réduites pour conduire à des résultats substantiels, à moins de faire intervenir plusieurs hypothèses auxiliaires qu'on aurait une faible probabilité de voir simultanément réalisées. Ce cas est d'ailleurs peu fréquent.

viront au calcul des *masses* et des *parallaxes moyennes* des couples dont on a les données *c* ci-dessus.

5. Ainsi, quoique le but ait été d'obtenir un résultat d'ordre pratique, la relation masse-luminosité est essentiellement utilisée, dans ce Chapitre I, à la *vérification d'une loi* ⁽¹⁹⁾. Nous l'appliquons ensuite (Chapitres II et III) aux deux cas concrets d'indétermination *b* et *c* indiqués plus haut. Quel que soit le problème envisagé, la relation permet de connaître des *valeurs maxima ou minima rigoureuses* ⁽²⁰⁾ et des inconnues (magnitudes et masses des composantes, inclinaison ou parallaxe) et des valeurs « moyennes » hypothétiques de celles-ci, avec l'erreur probable correspondante. On considère d'abord, au Chapitre II, les *couples à un spectre et parallaxe*, c'est-à-dire le cas *b* : nous montrons que, d'après une propriété fondamentale des magnitudes individuelles, la *masse* de la composante principale (dont on connaît le type spectral) reste comprise entre deux valeurs extrêmes ou *bornes* peu différentes, l'amplitude de l'*intervalle d'incertitude* correspondant à une erreur relative de l'ordre de 10 p. cent. Nous déterminons de même les masses maxima et minima de la seconde composante, les valeurs extrêmes des magnitudes visuelles (absolues ou apparentes), enfin, une *inclinaison minima* dont on déduit la valeur maxima du demi-grand axe de l'orbite absolue décrite par la composante principale autour du centre de gravité. Après une discussion des *conditions de compatibilité* entre les données de l'observation et la relation masse-luminosité, on examine l'importance de l'*oscillation* entre les bornes assignées à chaque élément, et l'exposé s'achève par l'étude des *erreurs* susceptibles d'affecter les résultats.

Le Chapitre III traite des couples appartenant au cas *c*, donc à *deux spectres visibles*, mais *dépourvus de parallaxe observée* ⁽²¹⁾. La relation masse-luminosité ne conduit pas ici à des résultats aussi abondants que dans le cas *b*, le type spectral de la seconde composante étant une donnée moins avantageuse que la parallaxe. En revanche, la relation nous renseigne précisément sur la parallaxe. Comme au Chapitre II, nous établissons d'abord les relations d'inégalités qui déterminent les bornes strictes des inconnues : *magnitudes absolues maxima* des composantes et *parallaxe maxima*

19. En soi, l'accord entre lois empirique et théorique vérifie l'une quelconque de ces lois en fonction de l'autre. Et comme les hypothèses qui sont à la base de la loi théorique de probabilité sont, sinon évidentes, du moins assez naturelles et intuitives pour justifier dans une certaine mesure ladite loi, il est tout aussi légitime d'interpréter l'accord comme une *vérification statistique* de la réalité des inclinaisons issues de la relation masse-luminosité, dans un cas dépourvu de vérification individuelle pour chaque étoile.

20. C'est-à-dire *strictes*, exactes quant au calcul formel (indépendamment des causes numériques d'imprécision).

21. De même qu'au Chapitre II, nous écartons les *parallaxes dynamiques*, qui ne sont pas indépendantes de la relation masse-luminosité et ne sauraient être considérées comme des données d'observation.

du système. Utilisant les résultats statistiques du Chapitre I (dont l'emploi revêt plus d'importance que dans le cas *b*, à cause de l'indétermination plus grande du problème) nous calculons aussi, pour chaque couple particulier, une *parallaxe moyenne*. La considération de l'*erreur probable* montre que, eu égard à la petitesse de ces parallaxes, leur précision peut être considérée comme très satisfaisante, comparativement à certaines parallaxes trigonométriques faibles ou négatives que contiennent les meilleurs Catalogues. De plus, la discussion de l'erreur sur la parallaxe en fonction de l'erreur provenant d'une valeur hypothétique de l'inclinaison, conduit à une constatation curieuse : si, par exception, on trouve des valeurs maxima ou moyenne de la parallaxe, trop élevées pour présenter quelque intérêt, ce résultat négatif est compensé par un renseignement complémentaire sur l'inclinaison, *la relation masse-luminosité permettant de déceler certains couples d'inclinaison faible*. Nous montrons qu'on peut, dans ce cas très particulier, déterminer une *inclinaison maxima* peu élevée, de laquelle on déduit de nouvelles *masses minima*, notablement plus grandes que les masses minima initiales issues de l'hypothèse $i = 90^\circ$.

Les *applications numériques* des méthodes trouvées font l'objet de Tableaux placés à la fin des Chapitres II et III. On y trouvera, après le rappel des données de l'observation, la valeur numérique des différentes quantités obtenues dans chacun des cas envisagés. Ces résultats sont suivis de remarques individuelles, dont le but est de préciser les conclusions relatives à certains couples particuliers. Nous nous sommes spécialement attaché à confronter les valeurs déduites de la relation masse-luminosité, avec les résultats analogues que d'autres Auteurs ont pu obtenir par d'autres voies : leur accord présente un caractère frappant. Enfin, nous avons introduit dans le corps même des Chapitres quelques exemples concrets, afin d'illustrer par des valeurs numériques et au fur et à mesure des besoins les développements théoriques de l'exposé.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde gratitude à M. E. ESCLANGON pour l'intérêt bienveillant qu'il a témoigné à mon travail, et à M. E. PALOQUE qui m'a donné toutes facilités pour poursuivre mes recherches. Je remercie particulièrement M. GEORGES DURAND qui a bien voulu diriger l'élaboration de ce Mémoire, et dont les suggestions et remarques ont été pour moi très fécondes : ses travaux sont le point de départ de mes recherches et j'ai tiré grand profit de mes conversations avec lui.

CHAPITRE I

LES INCLINAISONS.

PROPRIÉTÉS STATISTIQUES ET APPLICATION AU PROBLÈME DES MASSES

1. — Comparaison des moyennes théoriques et empiriques.

6. Moyennes théoriques.

Nous rappellerons tout d'abord comment on détermine les valeurs moyennes théoriques de l'inclinaison i et du facteur $\sin^3 i$ qui figure dans les expressions $\mu_1 \sin^3 i$, $\mu_2 \sin^3 i$ des masses minima: le calcul s'appuie sur des hypothèses simples et sur des considérations élémentaires de probabilité géométrique ⁽¹⁾.

Soient E l'étoile (*fig. 1*), ET la ligne de visée de l'observateur T, et EN la normale au

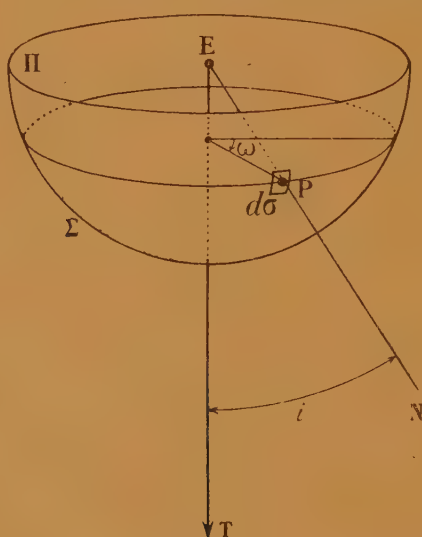


FIG. 1

plan de l'orbite. On sait que, pour les étoiles doubles spectroscopiques, l'inclinaison i est l'angle aigu des directions ET et EN. L'ensemble des directions possibles de EN balayent donc le demi-espace limité par le plan Π normal en E à ET. Soit, dans ce demi-espace,

⁽¹⁾ Voir, par exemple, E. BOREL, *Eléments de la théorie des probabilités*, 1910, p. 88; AITKEN, *The binary stars*, 1935, p. 219; RUSSELL, DUGAN, STEWART, *Astronomy*, t. 11, 1927, p. 701.

l'hémisphère Σ centré sur E et dont le rayon sera pris par unité de longueur. Deux hypothèses ont été envisagées :

a. Les plans des orbites sont orientés au hasard dans l'espace, ce qui revient à admettre toutes les directions de EN comme également probables. La probabilité pour que EN perce Σ à l'intérieur de l'élément d'aire $d\sigma$ est proportionnelle à $d\sigma$, donc égale à $\frac{d\sigma}{2\pi}$, 2π étant la surface totale de l'hémisphère Σ .

La *valeur moyenne* d'une fonction $f(i)$ de l'inclinaison est par suite :

$$(1) \quad \overline{f(i)} = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma} f(i) d\sigma^{(2)},$$

avec, en coordonnées polaires ω, i :

$$d\sigma = \sin i d\omega di.$$

Appliquons la formule (1) au calcul de la valeur moyenne de l'inclinaison.

On a $f(i) = i$, d'où :

$$\overline{i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} i \sin i di = 1 \text{ radian, soit : } \overline{i} = 57^{\circ},3.$$

De même, la valeur moyenne de $f(i) = \sin^3 i$ est :

$$\overline{\sin^3 i} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 i di = \frac{3\pi}{16} = 0,59.$$

b. Tout en admettant l'hypothèse précédente, on tient compte aussi de ce que les chances de découverte dépendent de l'orientation du plan de l'orbite par rapport à l'observateur : en d'autres termes, il existe une loi de probabilité $\varphi(i)$ qui régit la répartition des normales (ou des inclinaisons) *observées*, de sorte que la probabilité élémentaire est proportionnelle à $\varphi(i) d\sigma$. La valeur moyenne de $f(i)$ est alors :

$$(2) \quad \overline{f(i)} = \frac{\int \int_{\Sigma} f(i) \varphi(i) d\sigma}{\int \int_{\Sigma} \varphi(i) d\sigma}.$$

D'après les conditions physiques de découverte d'un système binaire au spectroscopie (déplacement des raies spectrales d'autant plus facile à mettre en évidence que la vitesse

(²) Suivant une notation habituelle en statistique, nous désignons par $\bar{x}$ la valeur moyenne d'une quantité quelconque x . Cette convention ne s'applique toutefois qu'au seul chapitre I.

radiale est plus élevée) on admet couramment avec SCHLESINGER que les chances de découverte sont proportionnelles à la vitesse radiale

$$V_r = \frac{an \sin i}{\sqrt{1-e^2}} [e \cos \psi + \cos (\theta + \psi)]^{(3)},$$

c'est-à-dire proportionnelles à $\sin i$. On a donc ici :

$$\varphi(i) = k \sin i \quad (k = \text{const.})$$

et la formule (2) donne :

$$\bar{i} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} i \sin^2 i \, di}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 i \, di} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \right) \text{radians, soit : } \bar{i} = 63^{\circ},2,$$

$$\overline{\sin^3 i} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 i \, di}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 i \, di} = \frac{32}{15} \frac{1}{\pi} = 0,68.$$

$\varphi(i)$ étant une fonction croissante, on obtient des nombres plus élevés qu'avec la seule hypothèse a , laquelle revient à poser $\varphi = \text{const.}$ et paraît devoir s'appliquer aux étoiles doubles *en général*.

CAMPBELL reconnaît également que les couples spectroscopiques dont les plans de l'orbite ont de grandes inclinaisons sont les plus faciles à découvrir, et propose de prendre $\overline{\sin^3 i} = 0,65$. « Pour 18 systèmes qu'il considère, il adopte même une valeur plus élevée, $\overline{\sin^3 i} = 0,75$, parce que 6 d'entr'eux sont à éclipses, avec des inclinaisons certainement comprises entre 60° et 90° » ⁽⁴⁾.

Il ne semble pas qu'on ait précisé davantage, jusqu'aujourd'hui, si les valeurs moyennes calculées s'appliquent à la totalité des étoiles doubles spectroscopiques (photométriques ou non) ou aux seuls couples non photométriques (à l'exclusion des binaires à éclipses).

⁽³⁾ On sait que, dans cette formule, a , n , e , ψ et θ désignent respectivement le demi-grand axe de l'orbite, le moyen mouvement, l'excentricité, la distance angulaire du nœud au périastre et l'anomalie vraie.

⁽⁴⁾ AITKEN, *op. cit.*, p. 219.

7. Matériel de la vérification. Moyennes empiriques.

Pour répondre à cette question, nous allons considérer : d'une part, les étoiles doubles spectroscopiques proprement dites (non photométriques) que nous désignerons par (S) et, d'autre part, l'ensemble (S)+(E) obtenu en complétant les étoiles (S) par celles, (E), qui sont aussi à éclipses.

Pour les couples (S), nous nous sommes servi des inclinaisons calculées par M. G. DURAND dans son Mémoire cité sur la *Détermination des éléments orbitaux des étoiles doubles spectroscopiques par la relation masse-luminosité*. On y trouvera ⁽⁵⁾ les résultats numériques relatifs à 52 couples, pour lesquels le Tableau I donne i et $\sin^3 i$.

TABLEAU I.

Etoiles doubles spectroscopiques non photométriques											
N°	Nom	i	$\sin^3 i$	N°	Nom	i	$\sin^3 i$	N°	Nom	i	$\sin^3 i$
1	π Cas	62°,7	0,702	19	63 Gem	64°,1	0,728	37	40 Dra	45°,6	0,365
2	ν And	39,5	257	20	H. D. 73619	65,9	761	38	Boss 4622	55,1	552
3	Σ 145 A	78,7	943	21	Boss 2484	63,1	709	39	108 Her	83,9	983
4	α Ari	26,3	087	22	$\circ$ Leo	51,3	475	40	205 Dra	61,4	677
5	ι Tri A	56,2	574	23	p Vel	31,0	137	41	50 Dra	49,2	434
6	ι Tri B	57,7	603	24	55 UMa	21,3	048	42	2 Sge	46,8	387
7	τ^3 Eri	22,9	059	25	95 Leo	51,4	477	43	θ Aql	31,7	145
8	τ^5 Eri	81,9	970	26	θ^1 Cru	44,1	337	44	57 Cyg	47,0	391
9	$\circ$ Per	90,0	1,000	27	η Vir	50,9	467	45	H. R. 8169	58,8	626
10	A Per	63,2	0,711	28	32 Cam	78,3	939	46	H. D. 205539	52,0	489
11	b^1 Per	41,6	293	29	ϵ UMa (AB,C)	64,1	728	47	Boss 5575	73,2	877
12	H. D. 29376	62,5	698	30	ζ^1 UMa A	61,7	683	48	Boss 5579	31,0	137
13	66 Eri	81,9	970	31	d Boo	73,3	879	49	Boss 5591	66,9	778
14	Boss 1275	66,2	766	32	39 Boo B	73,1	876	50	Boss 5683	54,2	534
15	ψ Ori	62,7	702	33	6 π Sco	48,2	414	51	2 Lac	45,6	365
16	136 Tau	39,1	251	34	σ^2 CrB	79,4	950	52	H. D. 218440	56,3	576
17	57 Ori	57,3	596	35	ϵ Her	55,4	558				
18	40 Aur	31,8	146	36	Boss 4423	50,2	454		Moyennes.....	55°,9	0,563

Quant aux inclinaisons des étoiles (E), elles sont tirées du *Quatrième Catalogue* de MOORE⁽⁶⁾. Parmi les 29 binaires à éclipses de ce Catalogue, nous avons retenu⁽⁷⁾ 22 couples

⁽⁵⁾ *Annales Obs. Toulouse*, t. XI, 1935, p. 227-235.

⁽⁶⁾ J. H. MOORE, *Fourth Catalogue of spectroscopic binary stars* (*Lick Observatory Bulletin*, vol. XVIII, 1936, n° 483, p. 23).

⁽⁷⁾ Après élimination des couples, indiqués par l'Auteur, dont les éléments photométriques sont insuffisants ou dont l'orbite présente quelque incertitude.

dont on a l'orbite photométrique avec des données satisfaisantes. Les valeurs de i et $\sin^3 i$ font l'objet du Tableau II.

TABLEAU II.

Binaires à éclipses							
N°	Nom	i	$\sin^3 i$	N°	Nom	i	$\sin^3 i$
1	TV Cas	74,0	0,888	12	u Her	77°,6	0,932
2	AG Per	78,3	939	13	TX Her	86,6	995
3	TT Aur	87,1	996	14	Z Her	82,0	971
4	β Aur	76,8	923	15	RX Her	86,3	994
5	WW Aur	87,7	998	16	U Sge	84,5	986
6	YY Gem	86,4	994	17	Z Vul	89,2	1,000
7	V Pup	74,0	888	18	σ Aql	71,6	0,854
8	S Ant	62,2	692	19	GO Cyg	71,2	848
9	W UMa	74,6	896	20	Y Cyg	88,2	999
10	RS CVn	79,9	954	21	RT Lac	89,2	1,000
11	U Oph	84,0	984	22	AR Lac	86,0	0,993
Moyennes...						80°,8	0,942

On obtient les moyennes empiriques suivantes :

Couples non photométriques (S) : $\bar{i} = 55^\circ,9$; $\overline{\sin^3 i} = 0,563$.

Binaires à éclipses (E) : $\bar{i} = 80^\circ,8$; $\overline{\sin^3 i} = 0,942$.

Couples photométriques ou non (S)+(E) : $\bar{i} = 63^\circ,3$; $\overline{\sin^3 i} = 0,675$.

8. La comparaison des résultats ci-dessus avec les moyennes calculées au n° 6, donne lieu aux remarques suivantes :

1° Il y a accord quant à l'ordre de grandeur, entre moyennes empiriques et théoriques. Du point de vue pratique — calcul des masses moyennes d'un grand nombre de couples (S) ou (S)+(E) — on pourrait prendre approximativement $\bar{i} = 60^\circ$ ou bien $\overline{\sin^3 i} = 0,6$ (8);

2° Considérant les seuls couples (S), les moyennes empiriques de i et de $\sin^3 i$ déduites de la relation masse-luminosité, sont moins élevées que les moyennes issues de la loi $\varphi(i) = k \sin i$. Alors qu'on adopte souvent dans les applications $\overline{\sin^3 i} = 2/3 = 0,67$, les inclinaisons "eddingtoniennes" ($\bar{i} = 56^\circ$, $\overline{\sin^3 i} = 0,56$) semblent plutôt vérifier l'hypothèse a du n° 6;

3° En revanche, si l'on considère l'ensemble (S)+(E), les moyennes empiriques ($\bar{i} = 63^\circ$, $\overline{\sin^3 i} = 0,75$) s'accordent de façon remarquable avec la loi $\varphi(i) = k \sin i$ (hypothèse b). La

(8) Les conditions d'emploi de $\overline{\sin^3 i}$ seront précisées plus loin (§ 6).

valeur $\overline{\sin^3 i} = 0,75$ proposée par CAMPBELL pour les (S)+(E), apparaît comme trop élevée.

D'après ces constatations, il semblerait qu'on doive suspecter pour les couples (S) la validité de l'hypothèse $\varphi(i) = k \sin i$, que justifie pourtant des considérations physiques évidentes : la présence éventuelle des binaires à éclipses pourrait en effet n'apporter qu'une apparence de vérification, en altérant les moyennes par leurs fortes inclinaisons. Nous montrerons qu'il n'en est rien. Mais seule une étude statistique complète des inclinaisons empiriques nous permettra de vérifier l'exactitude de telle ou telle hypothèse, sinon de préciser nos connaissances sur les probabilités de découverte. Pour cela, nous allons examiner successivement la *loi empirique de répartition des inclinaisons* des couples (S) et celle des couples (S)+(E).

§ 2. — Loi de répartition des inclinaisons calculées par la relation masse-luminosité (couples non photométriques).

9. Diagramme des fréquences empiriques.

Reprenons les $N = 52$ inclinaisons des couples (S) du Tableau I et divisons l'intervalle $(0^\circ, 90^\circ)$ en 9 intervalles partiels égaux. Si n et $n : N$ sont respectivement les *populations partielles* et les *rapports de fréquence*, on a le tableau :

$i =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$n =$	0	0	3	6	8	13	12	6	4	
$\frac{n}{N} =$	0,0	0,0	0,058	0,115	0,154	0,250	0,231	0,115	0,077	

Donc : tandis que les couples d'inclinaison faible sont extrêmement rares, les populations croissent avec i jusqu'à la valeur $i = 60^\circ$, autour de laquelle se groupent le plus d'étoiles. Au-dessus de 60° , leur nombre diminue rapidement, et les inclinaisons les plus fortes ne dépassent guère 80° .

On peut illustrer ces résultats par la construction du *polygone statistique* ou *histogramme* de KARL PEARSON (*fig. 2*).

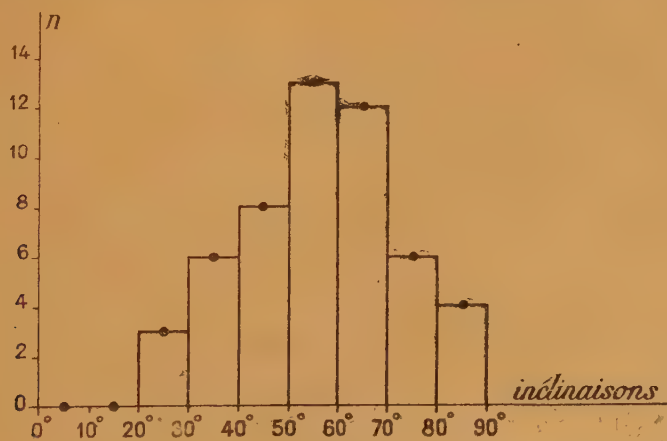


FIG. 2

Soulignons les caractères essentiels de la répartition : existence d'un *maximum des fréquences bien caractérisé et dissymétrie*, le maximum n'étant pas situé au milieu de l'intervalle total de variation de l'inclinaison.

10. Formules d'ajustement.

Pour comparer la loi théorique de probabilité (que nous établirons) avec la loi empirique de répartition qui en est en quelque sorte l'image, il est indispensable de chercher une représentation analytique convenable de la répartition (formule d'*ajustement*). La comparaison ultérieure des *écarts* entre la courbe d'ajustement $y = f(i)$ et les valeurs observées avec les écarts analogues relatifs à la courbe de probabilité, nous permettra d'apprécier si cette dernière est satisfaisante (§ 5).

1° *Courbe de Karl Pearson.* — La forme de la répartition suggère l'ajustement par une courbe à un sommet, dissymétrique et comprise entre deux minima nuls, donc du type :

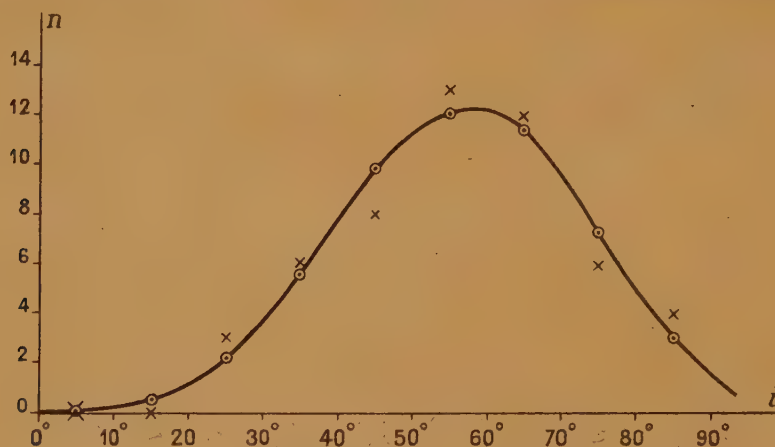
$$y = y_0 \left[1 + (x : a_1) \right]^{va_1} \left[1 - (x : a_2) \right]^{va_2}.$$

Avec $x = (i - 55^\circ) : 10$ comme variable, les paramètres sont déterminés par la méthode classique des *moments* ⁽⁹⁾. On trouve :

$$y_0 = 0,228, \quad a_1 = 4,63, \quad va_1 = 2,22, \quad a_2 = 3,60, \quad va_2 = 1,73.$$

Substituant $x = -5, -4, \dots, +3$, on obtient les fréquences relatives, qu'il suffit de multiplier par $N = 52$ pour avoir les populations n calculées.

2° *Courbe de Charlier* (Fig. 3.) — On peut encore représenter la répartition par une



x, *valeurs observées*; o, *valeurs calculées*.

FIG. 3. — Loi de répartition des inclinaisons des étoiles doubles spectroscopiques non photométriques.

(9) Voir G. DARMOIS, *Statistique mathématique* (Paris, Doin, 1928), Chap. IV.

courbe de CHARLIER du type A. Les fréquences théoriques η sont données par l'équation réduite ⁽¹⁰⁾ :

$$\sigma \eta = \varphi_0(\xi) + \beta_3 \varphi_3(\xi) + \beta_4 \varphi_4(\xi),$$

où

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \varphi_3(\xi) = \varphi_0(\xi)(3\xi - \xi^3), \quad \varphi_4(\xi) = \varphi_0(\xi)(3 - 6\xi^2 + \xi^4).$$

On a posé $\xi = (x - b) : \sigma$. Les valeurs numériques des paramètres sont :

$$b = +0,135, \quad \sigma = 1,555, \quad \beta_3 = 0,0185, \quad \beta_4 = -0,0273.$$

Le tableau ci-après permet de comparer les deux ajustements.

i		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
n	Obs.....	0	0	3	6	8	13	12	6	4	
	Calc. {	K. PEARSON									
		0,0	0,5	3,3	7,2	10,5	11,9	10,4	6,5	1,6	
$O - C$	Calc. {	CHARLIER									
		0,0	0,5	2,1	5,7	9,9	12,0	11,4	7,3	3,1	
	Calc. {	K. PEARSON									
		0,0	-0,5	-0,3	-1,2	-2,5	+1,1	+1,6	-0,5	+2,4	
$O - C$	Calc. {	CHARLIER									
		0,0	-0,5	+0,9	+0,3	-1,9	+1,0	+0,4	-1,3	+0,9	

Pour caractériser la précision, calculons l'écart moyen, $\varepsilon = |O - C|$, et la dispersion,

$$\sigma = \sqrt{(O - C)^2} \quad (11) \quad \text{On trouve :}$$

$$\text{Courbe de KARL PEARSON : } \varepsilon = 1,14, \quad \sigma = 1,41;$$

$$\text{Courbe de CHARLIER : } \varepsilon = 0,80, \quad \sigma = 0,97.$$

Malgré la légère différence en faveur de la courbe de CHARLIER on doit, eu égard au petit nombre d'étoiles utilisées et aux irrégularités qui en résultent dans la répartition, considérer les écarts $O - C$, dont l'ordre de grandeur reste celui de l'unité, comme également satisfaisants dans les deux cas ⁽¹²⁾.

11. Interprétation théorique.

1° La partie ascendante de la courbe s'explique de manière fort simple. Deux causes, signalées au n° 6, mais qu'il importe de préciser, interviennent et conduisent à des conséquences analogues :

a. Une cause d'ordre géométrique. Reprenons l'hypothèse a du n° 6 : le nombre des

¹⁰⁾ Voir, par exemple, V. MICHKOWITCH, *Etudes de statistique stellaire* (Thèse, Paris, 1924 et *Bull. Astron.*, 2^e série, t. IV, 1923, p. 9).

⁽¹¹⁾ Il est clair que σ n'a rien de commun avec le paramètre σ de la formule de CHARLIER.

⁽¹²⁾ Signalons que nous avons déjà rencontré (dans un ordre d'idées tout différent) un autre exemple curieux de répartition dissymétrique suivant la loi de CHARLIER, au cours d'observations où l'on s'attendait plutôt à vérifier la loi normale de GAUSS : voir à ce propos H. BERTHOMIEU, *Sur la distribution des écarts dans les mesures d'équation personnelle à l'astrolabe* (Annales Obs. Toulouse, t. XIV, 1938, p. 137).

couples d'inclinaison comprise entre i et $i + di$, c'est-à-dire pour lesquels le point P (fig. 1) se trouve dans une zone élémentaire d'aire $d\Sigma$, est proportionnel à $d\Sigma$, avec :

$$d\Sigma = \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \sin i \, di \, d\omega = 2\pi \sin i \, di,$$

donc proportionnel à $\sin i$. Cette cause se manifestera par la présence du facteur $\sin i$ dans toute loi générale $\Phi(i)$ exprimant la probabilité des inclinaisons;

b. Une double cause liée aux moyens d'observation. D'abord, la considération de la vitesse radiale V_r (hypothèse b du n° 6) introduit un deuxième facteur égal à $\sin i$ dans la loi $\Phi(i)$. Ensuite, il ne suffit pas de tenir compte de ce que V_r s'annule pour $i = 0$ rigoureusement: l'inclinaison doit atteindre une valeur suffisante pour que le déplacement des raies spectrales devienne accessible au spectroscopie, et cette valeur minima dépend des instruments utilisés. Leur précision ou leur sensibilité interviennent donc dans la découverte des étoiles doubles spectroscopiques à faible inclinaison.

Toutes ces raisons s'ajoutent pour expliquer l'absence totale de valeurs très petites de i et l'aspect de cette première partie de la courbe.

2° Les fréquences décroissantes quand i dépasse 55° , semblent en contradiction avec les différentes causes ci-dessus. Mais il ne faut pas oublier que ces causes jouent pour toutes les étoiles doubles spectroscopiques, tandis que les étoiles qui ont fait la matière de la statistique représentant un cas particulier: il s'agit des couples non photométriques (S), c'est-à-dire dont l'inclinaison est telle que les deux composantes ne s'éclipsent pas mutuellement. Et l'on sait que les étoiles doubles spectroscopiques sont, en général, des géantes très massives malgré leur faible densité, par conséquent telles que les dimensions des composantes — c'est-à-dire leurs rayons R_1 et R_2 — ne sont pas du tout négligeables devant la distance $a = a_1 + a_2$ de leurs centres. Il est clair, dès lors, que pour les fortes inclinaisons, de plus en plus voisines de 90° , le nombre des couples non photométriques ira en diminuant, tandis qu'on observera une proportion croissante de binaires à éclipses: c'est d'ailleurs ce que confirmeront les résultats statistiques relatifs à cette dernière catégorie d'étoiles (n° 13).

§ 3. — Loi de répartition des inclinaisons pour l'ensemble des étoiles doubles spectroscopiques (photométriques ou non).

12. Les considérations précédentes montrent qu'on peut maintenir pour les étoiles (S) l'hypothèse b du n° 6, c'est-à-dire le facteur de probabilité $\varphi(i) = k \sin i$, bien que les moyennes empiriques de i et de $\sin^3 i$ soient plus basses que les moyennes calculées avec ce facteur: le désaccord apparent provient du nombre réduit des couples (S) à forte inclinaison, donc d'une cause tout à fait étrangère à l'hypothèse en question. En complétant les (S) par les systèmes photométriques (E), nous allons montrer que la loi empirique de répartition des (S) + (E) confirme pleinement la réalité du facteur $\sin i$.

13. Inclinaison des binaires à éclipses. Loi de répartition.

Il est instructif d'examiner auparavant la répartition des étoiles (E) seules, à l'aide du Tableau II. Le dénombrement de ces $N' = 22$ couples suivant le même schéma que pour les (S), fournit les fréquences absolues et relatives ci-dessous :

$i = 0^\circ$		60°	70°	80°	90°
$n' =$	0	1	9	12	
$\frac{n'}{N'} =$	0,0	0,045	0,409	0,545	

On voit que les fréquences croissent très vite avec l'inclinaison (*fig. 4*), résultat dont

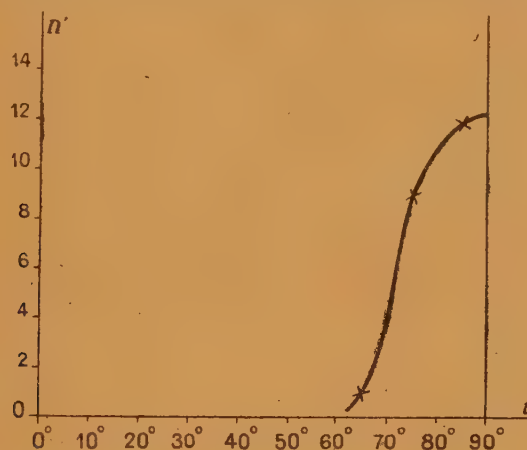


FIG. 4. — Loi de répartition des inclinaisons des binaires à éclipses.

l'explication évidente est l'accroissement tout aussi rapide des chances d'éclipse quand i tend vers 90° .

14. Loi de répartition des inclinaisons pour l'ensemble (S) + (E). Accord avec la loi théorique de probabilité.

1° Pour connaître la loi empirique de répartition des $N + N' = 74$ étoiles (S) + (E), il suffit d'ajouter les populations n' ci-dessus aux n des couples (S) ($n^\circ 9$). On forme ainsi le tableau :

$i = 0^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$n + n' =$	0	0	3	6	8	13	13	15	16
$\frac{n + n'}{N + N'} =$	0,0	0,0	0,041	0,081	0,108	0,176	0,176	0,203	0,216

A l'opposé de ce qu'on a constaté pour les étoiles (S), les fréquences croissent constamment avec l'inclinaison (du moins, ne sont jamais décroissantes), le taux d'accroissement

étant maximum vers le milieu de d'intervalle ($0^\circ, 90^\circ$), tandis qu'il tend à s'annuler aux extrémités (fig. 5).

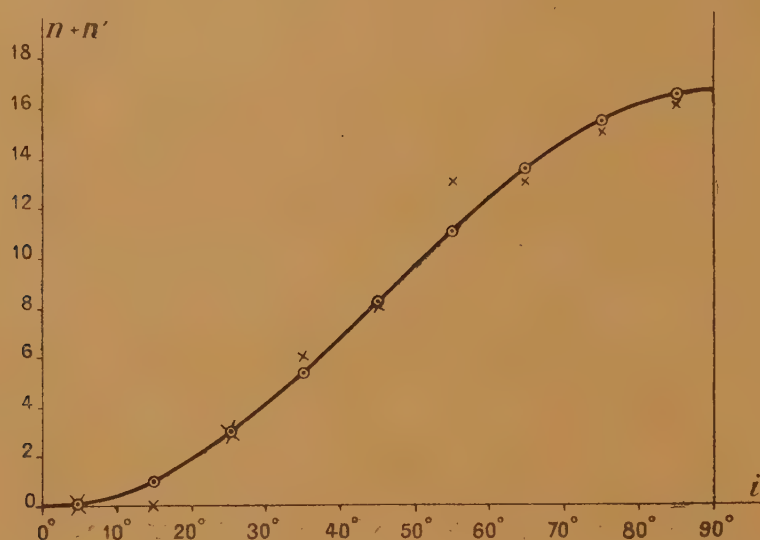


FIG. 5. — Loi de répartition des inclinaisons des étoiles doubles spectroscopiques (photométriques ou non).

2° Ces constatations sont favorables à la réalité des deux facteurs de probabilité, égaux chacun à $\sin i$ dans la loi théorique $\Phi(i)$ (n° 11). La loi $\Phi(i)$ relative à l'ensemble (S)+(E) est donc de la forme :

$$\Phi(i) = A \sin^2 i \quad (A = \text{const.})$$

Déterminons A en écrivant que la probabilité totale est égale à l'unité :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(i) di = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 i di = 1;$$

on trouve immédiatement $A = \frac{4}{\pi}$, d'où :

$$\Phi(i) = \frac{4}{\pi} \sin^2 i.$$

Calculons les fréquences f assignées par la loi $\Phi(i)$ à chaque intervalle partiel Δi . On a :

$$f = \frac{4}{\pi} \int_i^{i+\Delta i} \sin^2 i di = \frac{1}{\pi} \left[2 \Delta i - \sin 2(i + \Delta i) + \sin 2i \right],$$

avec :

$$i = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ; \quad \Delta i = +10^\circ, \text{ soit } +0,1745 \text{ radian.}$$

La comparaison des populations théoriques $(N+N')f$ avec les $n+n'$ empiriques fournit le tableau suivant :

	$i = 0^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$n+n'$ { Obs. =	0	0	3	6	8	13	13	15	16	
Calc. =	0,2	1,1	3,0	5,4	8,2	11,0	13,5	15,3	16,3	
O - C =	-0,2	-1,1	0,0	+0,6	-0,2	+2,0	-0,5	-0,3	-0,3	

L'écart moyen et la dispersion valent respectivement :

$$\varepsilon = |\overline{O - C}| = 0,58, \quad \sigma = \sqrt{(\overline{O - C})^2} = 0,82.$$

Ces valeurs sont faibles, inférieures à celles qu'on avait trouvées avec les courbes d'ajustement pour les étoiles (S) (n° 10). On doit en conclure que la loi de probabilité $\Phi(i) = \frac{4}{\pi} \sin^2 i$ interprète les résultats empiriques de façon satisfaisante, ce qui justifie les hypothèses qui lui servent de base.

15. Valeurs moyennes de i et de $\sin^3 i$.

Naturellement, on retrouve avec la loi $\Phi(i)$ les moyennes théoriques calculées au n° 6 (hypothèse b) :

$$\bar{i} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} i \Phi(i) di = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} i \sin^2 i di = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \quad (63^\circ, 2),$$

$$\overline{\sin^3 i} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 i \Phi(i) di = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 i di = 0,68,$$

tandis que les moyennes empiriques relatives au (S)+(E) sont (n° 7) :

$$\bar{i} = 63^\circ, 3, \quad \overline{\sin^3 i} = 0,675.$$

Nous parvenons en définitive à une excellente vérification de la valeur $\overline{\sin^3 i} = 0,68$ proposée par SCHLESINGER, mais il est essentiel de souligner que *ce nombre s'applique à l'ensemble des couples (S)+(E) : on ne saurait donc, du point de vue pratique, l'utiliser à l'évaluation des masses moyennes des étoiles doubles spectroscopiques non photométriques (S) prises isolément.*

§ 4. — Inclinaisons maxima des couples non photométriques.

16. Condition de non-éclipse.

De ce qui précède résulte qu'il faut adopter pour les couples (S) un $\overline{\sin^3 i}$ inférieur à 0,68 (ou à la fraction $\frac{2}{3}$ qu'on indique parfois). L'objet de ce paragraphe et du suivant est précisément de montrer comment doit être modifié le calcul pour tenir compte du fait qu'on

écarte les binaires à éclipses. Nous verrons qu'on trouve des moyennes théoriques $\overline{i}$ et $\overline{\sin^3 i}$ en accord avec les moyennes empiriques issues de la relation masse-luminosité, tout en maintenant les hypothèses fondamentales sur les chances de découverte d'un couple (S), c'est-à-dire les deux facteurs de probabilité égaux chacun à $\sin i$.

Nous commencerons par exprimer, en fonction de l'inclinaison comme variable, la condition pour qu'une étoile de l'ensemble (S)+(E) soit une étoile (S), autrement dit la *condition de non-éclipse*.

Soit E l'orbite elliptique décrite par le compagnon B autour de la composante principale A située au foyer de E. Soit E' l'ellipse « apparente », projection de E sur le plan tangent en A à la sphère céleste (*fig. 6*). Dans le cas général où l'intersection du plan de

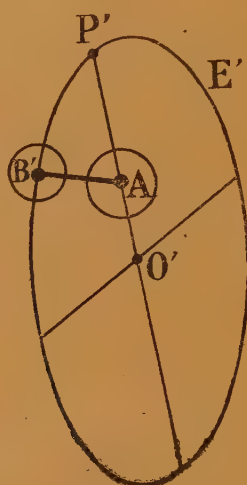


FIG. 6

l'orbite avec ce plan tangent (ligne des nœuds) a une direction quelconque, les axes de l'ellipse E se projettent suivant deux diamètres conjugués de E'. Soient P le périastre, projeté en P', et O le centre de l'ellipse E, projeté en O' centre de E'. La position de A' (confondu avec A) par rapport à E' est définie par :

$$\frac{\overline{O'A}}{\overline{O'P'}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{c}{a} = e,$$

e désignant l'excentricité de l'orbite E. Soit B' la position apparente du compagnon B quand la distance apparente $\overline{AB'}$ des centres des composantes est *minima*. Supposons les deux astres A et B *sphériques* et désignons par R_1 et R_2 leurs rayons respectifs. La condition de non-éclipse est :

$$\overline{AB'} \geq R_1 + R_2.$$

Il s'agit d'évaluer $\overline{AB'}$ en fonction des éléments orbitaux : demi-grand axe a , excentricité e , inclinaison i et distance angulaire ψ du nœud au périastre.

Désignons par r la distance $\overline{AB}$ entre les centres des composantes (fig. 7), par θ

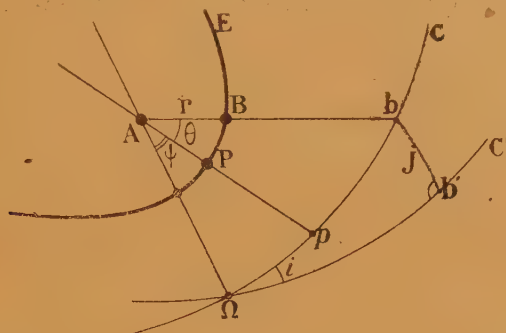


FIG. 7

l'anomalie vraie $\widehat{PAB}$, et calculons le minimum de la distance projetée, $r' = \overline{AB'}$. Soit j l'angle $\widehat{BAB'}$; on a :

$$(3) \quad r' = r \cos j,$$

r étant donné par l'équation polaire de l'ellipse vraie E :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}.$$

Pour évaluer j considérons la sphère centrée sur A, que le plan de l'orbite et le plan de l'ellipse projetée coupent suivant les grands cercles C et C'. Soient b et b' les points où AB et AB' percent la sphère, et AΩ la ligne des nœuds, faisant avec AP l'angle ψ . L'angle j est alors représenté par l'arc de grand cercle $\widehat{bb'}$; et le triangle sphérique $bb'\Omega$, rectangle en b' , donne :

$$\sin j = \sin i \sin (\theta + \psi),$$

d'où, d'après (3) :

$$(4) \quad r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2 (\theta + \psi)} \quad (13).$$

(13) Dans son *Traité d'Astronomie stellaire* (t. II, 1900, p. 198), CH. ANDRÉ calcule r' (qu'il appelle D) en projetant la ligne de visée sur le plan de l'orbite. Les angles de cette projection avec le rayon vecteur et avec le périastre sont désignés respectivement par w et α , de sorte que l'anomalie vraie est $w - \alpha$. On vérifiera que la formule (1) d'ANDRÉ (*loc. cit.*), qui exprime D en fonction de w , α et $\varphi = \frac{\pi}{2} - i$, est identique à celle que nous venons d'établir. Signalons, à la même page et cinq lignes plus loin, une erreur dans la condition du minimum de D; il faut lire :

$$(\cos^2 \varphi \cos w + e \cos \alpha) \sin w - e \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos w = 0;$$

moyennant le changement de variables $w = \theta + \alpha = \theta + \psi - \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2} - i$, on retrouve cette condition sous la forme (5) que nous donnons ci-après.

Quand r' est minimum, AB' est perpendiculaire à l'ellipse apparente E' et $dr' = 0$. Écrivons que $dr' : d\theta$ s'annule ; il vient :

$$(5) \quad e \sin \theta - \sin^2 i \sin(\theta + \psi)[e \cos \psi + \cos(\theta + \psi)] = 0.$$

Posant $t g \frac{\theta}{2} = t$, on se ramène à l'équation du 4^e degré :

$$A(1 - e)t^4 - 2(eB + C)t^3 - 6At^2 - 2(eB - C)t + A(1 + e) = 0,$$

avec :

$$A = \sin^2 i \sin \psi \cos \psi, \quad B = 1 - \sin^2 i \cos^2 \psi, \quad C = \sin^2 i (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi).$$

Les 4 racines, dont 2 sont toujours réelles⁽¹⁴⁾, déterminent les valeurs de l'anomalie, pour lesquelles AB' est normal à E' . Soit θ_0 celle qui correspond à la plus courte distance r'_0 : on a r'_0 par (4) où $\theta = \theta_0$.

Pratiquement, seules nous intéressent les conditions approchées de non-éclipse, en fonction de l'inclinaison et de l'excentricité moyenne des étoiles (S). Et comme l'angle ψ est inconnu, nous chercherons une condition *suffisante* : il faut donc calculer le *minimum minimorum* de r' , c'est-à-dire, dans (4), prendre

$$\sin^2(\theta + \psi) = 1 \quad \text{et} \quad \cos \theta = -1,$$

d'où :

$$r' = a(1 - e) \cos i,$$

et la condition s'écrit :

$$(6) \quad a(1 - e) \cos i \geq R_1 + R_2.$$

Les circonstances réelles du minimum minimorum sont donc $\theta = 0$ avec $\psi = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$.

Il suffit, en définitive, que la ligne des nœuds soit perpendiculaire à la ligne des apsides.

17. Inclinaison maxima.

La condition (6) donne l'inclinaison limite J_e qu'une étoile (S) ne peut dépasser sans possibilité d'éclipse :

$$(7) \quad \cos J_e = \frac{R_1 + R_2}{a(1 - e)}.$$

Cas ordinairement réalisé. — On sait que l'excentricité des étoiles (S) est en général *faible* : $e = 0,17$ en moyenne⁽¹⁵⁾. Cela permet de négliger l'excentricité sans erreur grave dans le calcul de l'inclinaison maxima. Nous remplacerons provisoirement J par J_0 tel que :

$$(8) \quad \cos J_0 = \frac{R_1 + R_2}{a}.$$

⁽¹⁴⁾ On sait que par un point du plan passent 4 normales à une ellipse, mais 2 peuvent être imaginaires. Les 4 normales sont réelles si le point est à l'intérieur de la développée.

⁽¹⁵⁾ Voir, par exemple, AITKEN, *The binary stars*, éd. 1935, p. 205-210.

18. Le rapport $\frac{R_1+R_2}{a}$.

Calculons $(R_1+R_2):a$ pour les 52 couples (S). Nous connaissons, par la relation masse-luminosité, la distance linéaire a entre les centres des composantes (rayon de l'orbite absolue supposée circulaire) ⁽¹⁶⁾. Il suffit d'évaluer les rayons R_1 et R_2 des composantes: nous utiliserons la formule classique qui relie la *magnitude absolue bolométrique* M_b d'une étoile à son *rayon* R et à sa *température effective* T :

$$\log R = 8,43 - 2 \log T - 0,2 M_b.$$

T se déduit du type spectral d'après l'échelle des températures et M_b s'obtient à partir de la magnitude absolue visuelle M_v par l'intermédiaire de l'indice de chaleur:

$$H = M_v - M_b = 10 \log T + 2,3 \left(\frac{14\,300}{T} \right)^{0,93} + \text{const.}^{(17)}$$

Comme on connaît ici les types spectraux et les magnitudes absolues visuelles M_1 et M_2 des composantes (par la relation masse-luminosité), on calcule sans difficulté R_1 et R_2 .

Le Tableau III donne $(R_1+R_2):a$ et les inclinaisons maxima j_0 déduites de (8), pour les 52 couples (S).

TABLEAU III.

Étoiles doubles spectroscopiques non photométriques											
N°	Nom	$\frac{R_1+R_2}{a}$	j_0	N°	Nom	$\frac{R_1+R_2}{a}$	j_0	N°	Nom	$\frac{R_1+R_2}{a}$	j_0
1	π Cas	0,387	67°,3	19	63 Gem	0,357	69°,1	37	40 Dra	0,100	84°,3
2	ν And	188	79,2	20	H.D. 73619	068	86,1	38	Boss 4622	462	62,5
3	Σ 145 A	186	79,3	21	Boss 2484	065	86,3	39	108 Her	107	83,9
4	$\times$ Ari	050	87,1	22	α Leo	167	80,4	40	205 Dra	404	66,2
5	ϵ Tri A	238	76,2	23	p Vel	144	81,7	41	50 Dra	183	79,5
6	ϵ Tri B	337	70,3	24	55 UMa	311	71,9	42	2 Sge	084	85,2
7	τ^2 Eri	2,033	—	25	95 Leo	316	71,6	43	θ Aql	099	84,3
8	τ^3 Eri	0,160	80,8	26	θ^1 Cru	076	85,7	44	57 Cyg	230	76,7
9	α Per	137	82,1	27	η Vir	025	88,6	45	H.R. 8169	091	84,8
10	A Per	058	86,7	28	32 Cam	223	77,1	46	H.D. 205539	149	81,4
11	b^1 Per	376	67,9	29	ϵ UMa (AB,C)	004	89,8	47	Boss 5575	137	82,1
12	H.D. 29376	479	61,4	30	ζ^1 UMa A	076	85,6	48	Boss 5579	616	52,0
13	66 Eri	152	81,3	31	d Boo	152	81,3	49	Boss 5591	169	80,3
14	Boss 1275	285	73,4	32	39 Boo B	102	84,1	50	Boss 5683	633	50,7
15	ψ Ori	320	71,3	33	6 π Sco	399	66,5	51	2 Lac	184	79,4
16	136 Tau	143	81,8	34	σ^2 CrB	122	83,0	52	H.D. 218440	156	81,1
17	57 Ori	270	74,3	35	ϵ Her	174	80,0				
18	40 Aur	237	76,3	36	Boss 4423	086	85,0		Moyennes...	0,209	77°,7

⁽¹⁶⁾ G. DURAND, *Annales Obs. Toulouse*, t. XI, 1935, p. 227-235.

⁽¹⁷⁾ Voir, pour le calcul de H , l'Ouvrage d'EDDINGTON, *The internal constitution of the stars* (Table 16) et une formule plus simple dans RUSSELL, DUGAN, STEWART, *Astronomy*, t. II, p. 716.

19. Loi de répartition du rapport $\frac{R_1+R_2}{a}$.

1° *Couples non photométriques* (S). — Nous disposons (après avoir écarté τ^2 Eri) de 51 valeurs du rapport $(R_1+R_2):a$, dont la répartition est la suivante :

$(R_1+R_2):a =$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$n =$	32	14	3	2	0	

Les fréquences décroissent rapidement quand le rapport augmente : 90 p. cent des couples (S) sont tels que $(R_1+R_2):a < 0,4$; en revanche, on rencontre très peu de systèmes à composantes rapprochées, les valeurs les plus fortes du rapport dépassant à peine 0,6. La *valeur moyenne* de $(R_1+R_2):a$ est 0,21.

2° *Binaires à éclipses* (E). — Afin de comparer les résultats précédants à ceux qu'on obtient pour les binaires à éclipses, nous avons calculé $R_1+R_2:a$ pour les 22 couples (E) du Tableau II, en utilisant les données numériques du *Quatrième Catalogue* de MOORE (*loc. cit.*) Quoique peu copieux, ce matériel donne une idée de la loi de répartition. On a d'après le Tableau IV :

$(R_1+R_2):a =$	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$n' =$	0	7	8	5	1	

en mettant à part l'étoile *V Puppis*, pour laquelle $(R_1+R_2):a = 1,27$.

TABLEAU IV.

Binaires à éclipses							
N°	Nom	Type photom.	$\frac{R_1+R_2}{a}$	N°	Nom	Type photom.	$\frac{R_1+R_2}{a}$
1	TV Cas	A	0,602	12	<i>u</i> Her	β	0,636
2	AG Per	A	447	13	TX Her	A	297
3	TT Aur	β	730	14	Z Her	A	335
4	β Aur	A	318	15	RX Her	A	381
5	WW Aur	A	343	16	U Sge	A	465
6	YY Gem	A	371	17	Z Vul	A	577
7	V Pup	β	1,272	18	σ Aql	β	485
8	S Ant	β	0,894	19	GO Cyg	β	760
9	W UMa	W	735	20	Y Cyg	A	412
10	R S CVn	A	381	21	RT Lac	β	559
11	U Oph	A	505	22	AR Lac	A	530
Moyenne							0,547

On a 19 couples, soit 86 p. cent, tels que $(R_1+R_2):a$ est compris entre 0,3 et 0,8, la valeur moyenne étant 0,55. La loi de répartition diffère de celle des couples (S) : d'une manière générale, les composantes d'un système (E) sont plus rapprochées, comparativement à leurs dimensions, que les composantes d'un couple (S). De plus, si dans le Tableau IV

on distingue les 14 couples du type *Algol* (désignés par la lettre A) des 8 couples restants (W *UMa* et 7 couples du type β *Lyræ*, désignés par β) à composantes *ellipsoïdales*, on constate que $(R_1 + R_2) : a$ est plus élevé en moyenne pour ces dernières, que pour le type *Algol*. On trouve ici $(R_1 + R_2) : a = 0,43$ (type A) et 0,76 (types β et W) ⁽¹⁸⁾.

3° Pour illustrer ces résultats, nous avons construit (*fig. 8*) les courbes de répartition du rapport $(R_1 + R_2) : a$ pour les couples (S) et (E), en considérant séparément, parmi les (E), les deux types (A) et (β) + (W). On notera la différence entre les trois catégories d'étoiles :

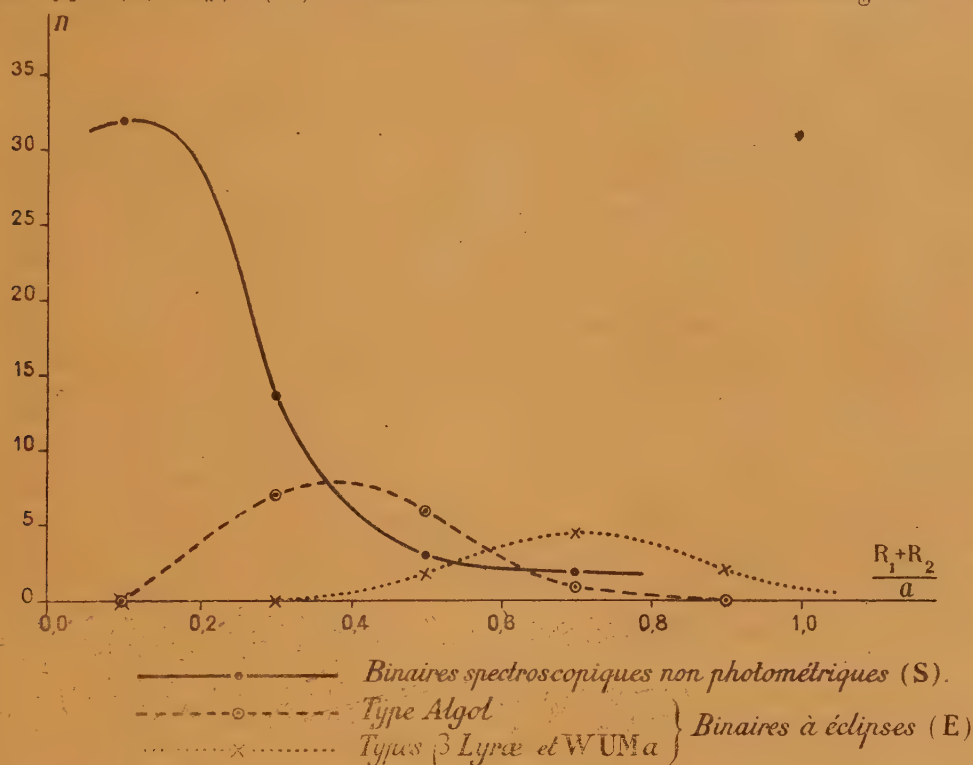


FIG. 8. — Loi de répartition du rapport $\frac{R_1 + R_2}{a}$ pour les étoiles (S) et (E).

les sommets des courbes correspondantes sont nettement séparés. De plus, la courbe relative aux (S) montre une *accumulation* des valeurs individuelles autour de la moyenne, tandis que les courbes relatives aux (E) présentent un *étalement*.

En ce qui concerne les (S), nous tirerons profit de cette particularité pour calculer la valeur moyenne de $\sin^3 i$ en attribuant aux inclinaisons une valeur maxima déduite de :

$$i_0 = \arccos \left(\frac{R_1 + R_2}{a} \right) = 77^\circ,9.$$

⁽¹⁸⁾ Cf. C. PAYNE-GAPOSCHKIN, et S. GAPOSCHKIN, *Variable stars* (Harvard Observatory Monographs, n° 5, 1938). On trouvera dans cet Ouvrage (p. 28) des renseignements numériques sur la valeur moyenne de $(R_1 + R_2) : a$ et sur l'inclinaison limite correspondante, qui s'accordent avec les résultats ci-dessus.

20. Erreur provenant de l'excentricité.

Cherchons l'erreur commise sur l'inclinaison maxima $\mathfrak{J}$ des étoiles (S) quand on néglige l'excentricité, c'est-à-dire quand on remplace le second membre de la formule (7) par sa valeur approchée $(R_1 + R_2) : a$. On a par soustraction :

$$\Delta \cos \mathfrak{J} = \frac{R_1 + R_2}{a} \left(\frac{1}{1 - e} - 1 \right) = \frac{R_1 + R_2}{a} e (1 + e),$$

en négligeant le terme en e^3 dans le développement de $(1 - e)^{-1}$. Substituons les moyennes $(R_1 + R_2) : a = 0,21$ et $e = 0,17$; explicitons l'erreur $\Delta \mathfrak{J} = \mathfrak{J}_e - \mathfrak{J}_0$ dont on néglige le carré; il vient, avec $\mathfrak{J}_0 = 77^\circ,9$:

$$\Delta \mathfrak{J} = - \frac{1}{0,01745} \frac{\Delta \cos \mathfrak{J}}{\sin \mathfrak{J}_0} = - 2^\circ,5.$$

L'erreur est *par excès*, l'excentricité ayant pour effet de rendre l'éclipse possible dans la zone $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_0)$, tandis qu'elle ne se produirait pas avec une orbite circulaire de rayon a . Bien qu'on ait choisi pour e une moyenne, remarquons que l'erreur ainsi calculée a le caractère d'une *limite supérieure*, puisqu'on s'est placé dans le cas le plus défavorable à la non-éclipse (n° 16). On voit que l'influence de l'excentricité pourrait être négligée, d'autant plus que la précision numérique du rapport $(R_1 + R_2) : a$ n'est pas très grande. Nous en tiendrons compte néanmoins, en nous plaçant dans les conditions « moyennes » qui correspondent à la *moitié* de l'erreur $\Delta \mathfrak{J}$, et nous adopterons l'inclinaison maxima corrigée :

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 + \frac{\Delta \mathfrak{J}}{2} = 76^\circ,7.$$

21. Valeurs moyennes de l'inclinaison et de $\sin^3 i$. Accord avec les moyennes empiriques.

D'après la remarque qui termine le n° 19, nous pouvons prendre $\mathfrak{J}$ comme inclinaison maxima des couples (S) et calculer, dans l'intervalle de variation réduit $i = 0, i = \mathfrak{J}$, les moyennes « théoriques » de i et de $\sin^3 i$. Sauf la limite supérieure $\mathfrak{J}$ de l'intégration, les formules sont les mêmes qu'au n° 6 (cas *b*). On a, avec $\mathfrak{J} = 76^\circ,7$:

$$\bar{i} = \frac{\int_0^{\mathfrak{J}} i \sin^2 i \, di}{\int_0^{\mathfrak{J}} \sin^2 i \, di} = \frac{\mathfrak{J} (\mathfrak{J} - \sin 2\mathfrak{J}) + \sin^2 \mathfrak{J}}{2\mathfrak{J} - \sin 2\mathfrak{J}} = 0,960 \text{ rad.}, \text{ soit : } \bar{i} = 55^\circ,0;$$

$$\overline{\sin^3 i} = \frac{\int_0^{\mathfrak{J}} \sin^5 i \, di}{\int_0^{\mathfrak{J}} \sin^2 i \, di} = \frac{\frac{8}{15} - \cos \mathfrak{J} + \frac{2}{3} \cos^3 \mathfrak{J} - \frac{1}{5} \cos^5 \mathfrak{J}}{\frac{1}{2} (\mathfrak{J} - \sin \mathfrak{J} \cos \mathfrak{J})} = 0,558.$$

Ces nombres s'accordent parfaitement avec les moyennes empiriques $\bar{i} = 55^{\circ},9$ et $\overline{\sin^3 i} = 0,563$ du n° 7, ce qui justifie les considérations géométriques précédentes et vérifie, une fois de plus, la loi de probabilité adoptée. Sans doute, les moyennes qu'on vient d'obtenir ne constituent pas un résultat purement théorique, mais la vérification n'en est pas moins réelle, et elle présente sur celle du § 3 l'avantage de porter sur les seuls couples (S), sans faire intervenir les binaires à éclipses.

§ 5. Loi théorique de probabilité des inclinaisons pour les couples spectroscopiques non photométriques.

22. Nous avons établi (n° 14) une loi de probabilité $\Phi(i)$ valable pour l'ensemble (S+E) des systèmes spectroscopiques, photométriques ou non; et nous avons vu que $\Phi(i)$ est le produit de deux facteurs de probabilité, de la forme :

$$\varphi_1(i) = k_1 \sin i, \quad \varphi_2(i) = k_2 \sin i \quad (k_1 \text{ et } k_2 = \text{const.}),$$

de sorte que la probabilité d'une inclinaison comprise entre i et $i+di$ est :

$$\Phi(i) di = \varphi_1(i) \varphi_2(i) di = \frac{4}{\pi} \sin^2 i di.$$

Proposons-nous maintenant d'établir la fonction des probabilités élémentaires $\Psi(i)$ relative aux couples spectroscopiques proprement dits (S). Il faut pour cela écrire qu'on écarte les (E) des (S)+(E), sans préjudice pour les facteurs $\varphi_1(i)$ et $\varphi_2(i)$: il s'agit donc de compléter la loi générale $\Phi(i)$ par un troisième facteur de probabilité $\varphi_3(i)$, qui exprimera les chances de non-éclipse en fonction de l'inclinaison. Et l'on aura pour la probabilité élémentaire dp :

$$(9) \quad dp = \Psi(i) di = \Phi(i) \varphi_3(i) di = k \sin^2 i \cdot \varphi_3(i) di \quad (k = \text{const.}).$$

Nous traiterons la détermination du facteur $\varphi_3(i)$ comme un cas particulier du problème suivant : *quelle est la probabilité pour qu'un système binaire appartenant à l'ensemble (S)+(E) soit un couple (S) ?* La discussion des possibilités d'éclipse consistant à comparer entre elles les deux variables $\rho = (R_1 + R_2) : a$ et $\cos i$ (n° 16), la question se présente en effet sous deux aspects différents, suivant qu'on choisit comme paramètre le rapport ρ ou l'inclinaison :

I. L'inclinaison étant inconnue, déterminer la probabilité pour qu'on ait affaire à un couple (S) d'après l'importance des dimensions des composantes comparativement à la distance a entre leurs centres, c'est-à-dire en fonction de ρ ;

II. Supposant au contraire que c'est ρ qui reste indéterminé, exprimer la probabilité de non-éclipse en fonction de l'inclinaison.

Avant d'aborder le problème sous la forme II en vue de connaître $\varphi_3(i)$, nous allons traiter le problème I, intéressant par sa solution immédiate et susceptible d'une vérification statistique remarquable.

Il est facile d'avoir une *vérification statistique* de ce résultat en appliquant la formule (10) à la valeur moyenne de ρ . Calculons cette moyenne $\bar{\rho}$ avec le matériel (S)+(E) déjà utilisé; on a pour les types (S) et (E) séparément (Tableaux III et IV):

$$\bar{\rho}_S = 0,21 \text{ (51 couples)}, \quad \bar{\rho}_E = 0,55 \text{ (22 couples)},$$

d'où :

$$\bar{\rho} = \frac{51 \bar{\rho}_S + 22 \bar{\rho}_E}{73} = 0,31.$$

D'après (10), la fréquence relative des couples (S) parmi les (S)+(E) doit être de l'ordre de $1 - \bar{\rho} = 0,69$, nombre effectivement très voisin du rapport, $51 : 73 = 0,70$, des populations (S) et (S)+(E). La proportion numérique observée confirme d'une manière frappante le résultat théorique.

24. Détermination de la fonction $\Psi(i)$.

Soit toujours un couple quelconque de l'ensemble (S)+(E) ; nous supposons maintenant tout ignorer du rapport $(R_1 + R_2) : a$ compris entre 0 et 1. Les chances de non-éclipse doivent donc être supputées selon l'inclinaison, et l'on peut poser comme évident *a priori* que la probabilité d'avoir affaire à un couple (S), égale à l'unité pour $i = 0$ et nulle pour $i = 90^\circ$, est une fonction décroissante de l'inclinaison. Il revient au même de dire que cette probabilité croît avec la projection $\overline{O_1 A} = x$ du rayon $\overline{O_1 O_2}$; plus exactement, elle est une fonction croissante du rapport $\overline{O_1 A} : \overline{O_1 B} = x : a$ qui dépend de l'inclinaison seule et non plus des dimensions de l'orbite (puisque $x = a \cos i$). De fait, l'inclinaison se manifeste à l'observateur par l'*aplatissement* plus ou moins prononcé de l'ellipse apparente, de demi-axes x et a ; en d'autres termes, par le rapport $z = x : a$ qui est une donnée immédiate de l'observation⁽¹⁹⁾. C'est donc z qu'il faut adopter pour variable indépendante; z peut être considéré d'ailleurs comme la distance apparente minima entre les centres des composantes, au même titre que x , sauf qu'elle est mesurée avec le rayon a pour unité. Nous poserons donc désormais $a = 1$ et $z = x$, étant entendu qu'il s'agit d'une distance *réduite* où le paramètre a est éliminé.

Soit alors sur $O_1 B$ un segment élémentaire dx : la probabilité $d\omega$ pour que la projection A de O_2 se fasse à l'intérieur de dx sans phénomène d'éclipse, est :

$$d\omega = f(x) dx,$$

$f(x)$ étant une fonction positive croissante qui s'annule avec x , continuée ainsi que ses dérivées dans l'intervalle $0 < x < 1$.

A défaut d'autre renseignement, une hypothèse est nécessaire pour déterminer $f(x)$. Celle qui se présente à l'esprit comme la plus simple et la plus naturelle consiste à poser que *les chances de non-éclipse sont proportionnelles à la distance apparente x , c'est-à-dire :*

$$(11) \quad d\omega = C x dx \quad (C = \text{const.} > 0).$$

⁽¹⁹⁾ On peut imaginer, pour la clarté du raisonnement, que l'œil sépare les deux composantes et observe l'ellipse apparente, comme pour un couple visuel.

Quelle que soit la valeur de cette hypothèse, on peut toujours la considérer comme une *première approximation*, fournie par le premier terme du développement de $f(x)$ en série de MAC-LAURIN :

$$f(x) \equiv \alpha x + \beta x^2 + \dots + \lambda x^n + \dots$$

Cela posé, la relation (11), où $x = \cos i$, donne :

$$d\Omega = -C \sin i \cos i \, di,$$

ce qui fait apparaître le facteur de probabilité cherché, $\varphi_3(i)$, proportionnel à $\sin i \cos i$. Substituons dans (9) ; il vient :

$$dp = \Psi(i) \, di = K \sin^3 i \cos i \, di.$$

La constante K se détermine de la manière habituelle, en écrivant que

$$\int dp = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 i \cos i \, di = 1,$$

d'où $K = 4$. La fonction des probabilités élémentaires est donc :

$$\Psi(i) = 4 \sin^3 i \cos i.$$

25. Vérification de la loi théorique $\Psi(i)$.

La vérification s'effectue comme au n° 14 pour la loi $\Phi(i)$. On a immédiatement la fonction des probabilités totales, $\int \Psi(i) \, di = \sin^4 i$, et les fréquences théoriques f dans chaque intervalle partiel Δi :

$$f = \sin^4(i + \Delta i) - \sin^4 i, \\ (i = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ; \quad \Delta i = +10^\circ.)$$

Le Tableau ci-après permet de comparer les populations théoriques, $n = 52 f$, aux populations observées :

		$i =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
n	{ Obs. =		0	0	3	6	8	13	12	6	4	
	{ Calc. =		0,0	0,7	2,5	5,6	9,0	11,3	11,3	8,4	3,1	
	O — C =		0,0	-0,7	+0,5	+0,4	-1,0	+1,7	+0,7	-2,4	+0,9	

Ces écarts $O - C$ ne sont pas plus importants que ceux qu'on avait obtenus au n° 10 avec les formules d'ajustement.

D'une manière plus précise, on trouve les valeurs suivantes de l'écart moyen ε et de la dispersion σ :

$$\varepsilon = 0,92, \quad \sigma = 1,15,$$

qui sont intermédiaires entre les nombres fournis par la courbe de KARL PEARSON ($\varepsilon = 1,14$, $\sigma = 1,41$) et celle de CHARLIER ($\varepsilon = 0,80$, $\sigma = 0,97$). C'est dire que la loi de probabilité $\Psi(i)$, établie à partir d'un minimum d'hypothèses simples, représente les fréquences observées avec autant de précision que les formules empiriques créées spécialement pour ce but.

26. Moyennes déduites de la loi $\Psi(i)$.

Appliquons au calcul de $\bar{i}$ et $\overline{\sin^3 i}$ la formule classique utilisée au n° 15 pour l'ensemble (S)+(E). On a de même ici, pour les couples (S) :

$$\bar{i} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} i \Psi(i) di = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} i \sin^3 i \cos i di = \frac{5\pi}{16} \text{ rad.}, \text{ soit : } \bar{i} = 56^{\circ}, 2;$$

$$\overline{\sin^3 i} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 i \Psi(i) di = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 i \cos i di = \frac{4}{7} = 0,57;$$

résultats en excellent accord avec les moyennes empiriques $\bar{i} = 55^{\circ}, 9$ et $\overline{\sin^3 i} = 0,56$.

27. Écarts probables sur l'inclinaison et sur $\sin^3 i$.

Si l'on envisage $\bar{i}$ et $\overline{\sin^3 i}$ du point de vue des applications pratiques (détermination des masses), il importe de savoir avec quelle précision ces moyennes nous renseignent: nous allons calculer à cet effet l'*écart probable*, défini comme étant celui qu'on a la probabilité 1/2 de ne pas dépasser en valeur absolue.

1° Calculons l'écart probable Δi sur l'inclinaison, quand on adopte la valeur approchée $i_0 = \bar{i}$. Il faut écrire que la condition :

$$i_0 - \Delta i < i < i_0 + \Delta i$$

a la probabilité 1/2 d'être satisfaite, soit :

$$\int_{i_0 - \Delta i}^{i_0 + \Delta i} \Psi(i) di = \sin^4(i_0 + \Delta i) - \sin^4(i_0 - \Delta i) = \frac{1}{2},$$

équation qui détermine Δi en fonction de i_0 . Pour la résoudre, on part d'une valeur approchée Δ_0 de Δi . Posant :

$$\Delta i = \Delta_0 + x, \quad i_0 + \Delta_0 = \alpha, \quad i_0 - \Delta_0 = \beta,$$

on est ramené à l'équation :

$$(12) \quad \sin^4(\alpha + x) - \sin^4(\beta - x) = \frac{1}{2}.$$

Δ_0 est connu par estimation empirique, d'après le Tableau I. Soit, par exemple, $i_0 = 56^{\circ}$ et $\Delta_0 = 10^{\circ}$: on constate que 27 couples sur 52 satisfont à la double inégalité $46^{\circ} < i < 66^{\circ}$. L'appoint x à déterminer sera donc petit (de l'ordre du degré) et l'on pourra poser $\sin x = x$ et $\cos x = 1$ dans le développement des parenthèses du premier membre de (12). On trouve, avec $\alpha = 66^{\circ}$ et $\beta = 46^{\circ}$:

$$x = \frac{1}{0,01745} \frac{\frac{1}{2} - (\sin^4 \alpha - \sin^4 \beta)}{4 (\sin^3 \alpha \cos \alpha - \sin^3 \beta \cos \beta)} = +1^{\circ}, 8,$$

d'où l'écart probable : $\Delta i = 12^{\circ}$.

2° Posons $\sin^3 i = \theta$ pour abréger l'écriture, et calculons l'écart probable $\Delta \theta$ quand on

adopte $\theta_0 = \overline{\sin^3 i}$. La loi de probabilité $F(\theta)$ de la variable θ est définie par la relation :

$$F(\theta) d\theta = \Psi(i) di,$$

d'où :

$$F(\theta) = \frac{\Psi(i)}{d\theta : di} = \frac{4}{3} \sin i = \frac{4}{3} \theta^{\frac{1}{3}},$$

et l'on vérifie tout d'abord, θ variant de 0 à 1, que $\int_0^1 F(\theta) d\theta = 1$.

La condition pour que $\Delta\theta$ soit l'écart probable s'écrit :

$$\int_{\theta_0 - \Delta\theta}^{\theta_0 + \Delta\theta} F(\theta) d\theta = \frac{4}{3} \int_{\theta_0 - \Delta\theta}^{\theta_0 + \Delta\theta} \theta^{\frac{1}{3}} d\theta = (\theta_0 + \Delta\theta)^{\frac{4}{3}} - (\theta_0 - \Delta\theta)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Divisons par $\theta_0^{\frac{4}{3}}$ et posons :

$$\frac{\Delta\theta}{\theta_0} = y, \quad \frac{1}{2} \theta_0^{-\frac{4}{3}} = b,$$

il vient :

$$(13) \quad (1+y)^{\frac{4}{3}} - (1-y)^{\frac{4}{3}} = b.$$

b est connu; de plus, y est < 1 : développons les parenthèses en série. Les termes de degré pair se détruisent. Il reste :

$$y = \frac{3b}{8} + \frac{y^3}{27} + \frac{2y^5}{243} + \dots$$

Avec $\theta_0 = \frac{4}{7}$, d'où $b = 1,0544$, la première approximation donne $y = \frac{3b}{8} = 0,395$, tandis que les termes en y^3 et y^5 valent respectivement 0,0023 et 0,00004. L'équation (13) est satisfaite pour $y = 0,398$, c'est-à-dire :

$$\Delta\theta = y\theta_0 = 0,23.$$

Tel est l'écart probable théorique. La valeur empirique tirée du Tableau I est un peu plus petite : 26 couples sur 52 satisfont à la condition

$$0,56 - \Delta\theta < \sin^3 i < 0,56 + \Delta\theta$$

pour $\Delta\theta = 0,19$ ou 0,18. On peut admettre pratiquement la valeur ronde : $\Delta\theta = 0,20$.

§ 6. — Application au problème des masses.

28. Masses hypothétiques.

Soit $Q = \mu \sin^3 i$ l'une ou l'autre des *masses minima*, Q_1 et Q_2 , des composantes d'une étoile double spectroscopique à 2 spectres observés. Nous appellerons *masse hypothétique* la masse μ_0 obtenue en remplaçant $\sin^3 i$ par sa valeur moyenne, soit :

$$(14) \quad \mu_0 = Q : \overline{\sin^3 i}.$$

Le calcul de μ_0 par la formule (14), d'ailleurs classique, donne lieu à deux remarques importantes :

1° On utilise d'ordinaire ces masses hypothétiques à évaluer la masse « moyenne » des couples spectroscopiques faisant partie d'un certain ensemble, et il faut choisir tout d'abord la valeur numérique convenable de $\overline{\sin^3 i}$, suivant qu'on a affaire à des étoiles (S) ou à un mélange (S) + (E) contenant un pourcentage connu d'étoiles de chaque catégorie;

2° La masse hypothétique ne représente pas la masse la plus probable : celle-ci est égale à $Q (1 : \sin^3 i)$, de sorte que l'emploi de la formule (14) aux étoiles d'un ensemble (S) ou (S) + (E) ne saurait fournir, en général, des masses moyennes, *à moins que ces étoiles n'appartiennent à une sélection bien définie.*

L'objet de ce qui suit est de préciser les conditions d'emploi de la formule (14) afin d'éviter les erreurs, parfois importantes, qui résulteraient d'un choix défectueux de $\overline{\sin^3 i}$ ou d'étoiles mal sélectionnées.

29. Choix de $\overline{\sin^3 i}$.

a. *Couples non photométriques* (S). — Nous avons montré dans les paragraphes précédents qu'il était incorrect d'appliquer aux couples (S) la valeur $\overline{\sin^3 i} = 0,68$, et nous avons mis en évidence la moyenne $\theta_0 = 0,56$ propre à cette catégorie d'étoiles. Avec $\theta = 0,68$, on commet sur les masses hypothétiques μ_0 une erreur systématique qu'il est facile d'apprécier. On a en effet, d'une manière générale :

$$\mu = \frac{Q}{\theta}, \quad \mu + \Delta\mu = \frac{Q}{\theta + \Delta\theta}.$$

d'où les erreurs, absolue et relative, sur une masse μ :

$$(15) \quad \Delta\mu = -\mu \frac{\Delta\theta}{\theta + \Delta\theta}, \quad \frac{\Delta\mu}{\mu + \Delta\mu} = -\frac{\Delta\theta}{\theta}.$$

On a ici $\Delta\theta = \theta_0 - \theta = -0,12$. Par suite :

$$\frac{\Delta\mu_0}{\mu_0 + \Delta\mu_0} = +\frac{0,12}{0,68} = +0,18,$$

soit une *erreur par défaut*, de l'ordre de 20 pour cent.

On adoptera indifféremment $\theta_0 = 0,56$ ou bien la fraction $\frac{4}{7}$ (valeur théorique, n° 26).

b. *Mélange de deux populations* (S)+(E). — La moyenne $\theta = 0,68$ s'applique à un mélange (S)+(E) contenant une proportion de $n = 30$ p. cent d'étoiles (E). Si l'on désirait calculer les masses hypothétiques d'un autre mélange (S) + (E), avec un pourcentage n' de binaires à éclipses, la moyenne θ' à adopter serait donnée par la relation :

$$\frac{\theta' - \theta_0}{n'} = \frac{\theta - \theta_0}{n},$$

d'où, en substituant les valeurs numériques ci-dessus, la formule simple :

$$\theta' = 0,4n' + 0,56.$$

30. Précision d'une masse hypothétique.

On peut avoir une idée de la précision d'une masse hypothétique μ_0 d'après l'écart probable sur $\sin^3 i$, calculé au n° 27. Avec $\Delta\theta = \pm 0,20$, les formules (15) donnent :

$$\frac{\Delta\mu}{\mu_0 + \Delta\mu} = \mp \frac{0,20}{0,56} = \mp 0,357,$$

soit une erreur « probable » relative de 36 p. cent. On a d'autre part les erreurs absolues :

$$\Delta\mu = \frac{\mp 0,20}{0,56 \pm 0,20} \mu_0 = -0,26 \mu_0 \text{ ou } +0,56 \mu_0,$$

suyant le signe, positif ou négatif, de $\Delta\theta$: ce qui revient à dire que la double inégalité

$$(16) \quad 0,74 \mu_0 < \mu < 1,56 \mu_0$$

a une probabilité de l'ordre de $1/2$ d'être satisfaite ⁽²⁰⁾.

On voit que *pour un couple particulier* la masse hypothétique μ_0 est d'une précision assez médiocre. La raison en est qu'il ne faut pas attendre de résultat très précis d'une formule où l'on utilise les propriétés statistiques d'un élément inconnu (l'inclinaison) dans des conditions *défavorables*. Or, c'est ce qui se produit ici de deux manières :

1° Considérant les *écarts à la moyenne* sur la variable i et sur sa transformée $\theta = \sin^3 i$, il y a perte de précision quand on passe de la première à la seconde. On s'en rend compte par une simple confrontation entre les diagrammes de fréquences de l'inclinaison (voir *fig. 9*) et de $\sin^3 i$ (*fig. 10*) ; mieux encore, par la comparaison des écarts probables : l'intervalle

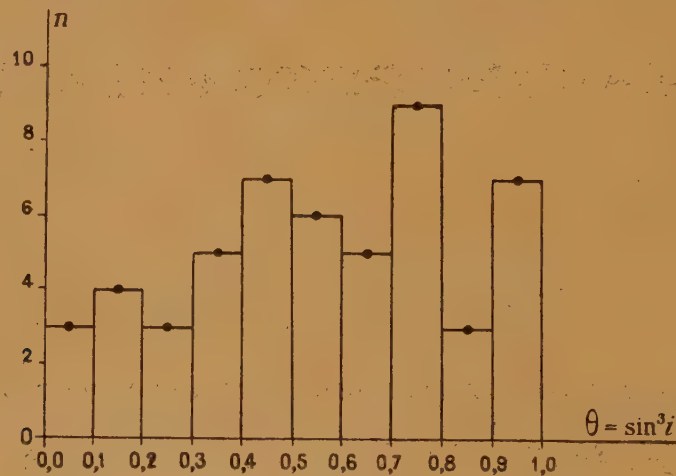


FIG. 10.

⁽²⁰⁾ Exactement $\frac{1}{2}$ si la fonction $\mu(\theta) = \frac{Q}{\theta}$ pouvait être considérée comme linéaire dans l'intervalle $\theta_0 \pm \Delta\theta$.

$\theta_0 \pm \Delta\theta$, d'amplitude $2 \Delta\theta$, représente en effet les 4 dixièmes de l'intervalle total de variation, tandis que l'intervalle analogue, $i_0 \pm \Delta i$, vaut 1/4 seulement de l'intervalle ($0^\circ, 90^\circ$);

2° Dans la formule $\mu = \frac{Q}{\sin^3 i}$, on rencontre de plus l'inconvénient de voir figurer en dénominateur le terme $\sin^3 i$ qui peut s'annuler : l'écart $\Delta\theta$, s'il est négatif, donne lieu à une erreur $\Delta\mu$ plus grande en valeur absolue que l'écart opposé; d'où la difficulté de préciser le dernier membre de la double inégalité (16), c'est-à-dire l'intervalle d'incertitude sur la masse, qui correspond à l'écart probable $\Delta\theta$.

31. Conditions d'emploi des masses hypothétiques.

Les considérations précédentes expliquent l'impossibilité pratique d'adopter comme masse hypothétique la masse la plus probable $Q \overline{(1 : \sin^3 i)}$. De très fortes erreurs s'introduisent dans le calcul de $1 : \sin^3 i$ du fait que $\sin^3 i$ n'est pas borné inférieurement par une valeur autre que zéro, et la moyenne se trouve entachée d'une indétermination considérable, qu'on l'obtienne soit par voie empirique, soit à partir d'une loi théorique de probabilité.

Ainsi, les 52 couples (S) du Tableau I conduisent à la moyenne empirique $1 : \sin^3 i = 3,1$. Mais l'addition ou la suppression d'un seul couple d'inclinaison faible, 20° par exemple, modifierait cette moyenne de $\pm 0,5$. D'autre part, la loi de probabilité $\Psi(i) = 4 \sin^3 i \cos i$ donne :

$$\overline{\left(\frac{1}{\sin^3 i}\right)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Psi(i)}{\sin^3 i} di = 4,$$

nombre qui diffère assez de la moyenne empirique, alors que l'accord est excellent sur $\bar{i}$ et sur $\overline{\sin^3 i}$. Et si l'on substituait à $\Psi(i)$ une loi plus générale, de la forme $A \sin^\alpha i \cos^\beta i$, on constaterait l'instabilité de $1 : \sin^3 i$ pour de petites variations de coefficients A , α et β ⁽²¹⁾.

Montrons maintenant que la formule (14) a une réelle signification physique, quand on en fait l'application *statistique* à un ensemble d'étoiles doubles spectroscopiques *sélectionnées*.

1° S'il y a sélection par rapport aux masses vraies, la moyenne des masses hypothétiques $\mu_0 = Q : \overline{\sin^3 i}$ est égale à cette masse vraie.

En effet, N étant le nombre d'étoiles,

$$\frac{\sum \mu_0}{N} = \frac{1}{N} \sum \frac{Q}{\sin^3 i} = \frac{1}{\overline{\sin^3 i}} \frac{\sum Q}{N}.$$

⁽²¹⁾ En prenant par exemple $\alpha = 3 + \varepsilon$ et $\beta = 1$, d'où $A = 4 + \varepsilon$, on a $\overline{\left(\frac{1}{\sin^3 i}\right)} = \frac{4 + \varepsilon}{1 + \varepsilon}$. Avec

$\varepsilon = \pm \frac{1}{2}$, on trouve respectivement 3 ou 7.

Soit μ' la masse vraie d'un couple particulier : on a $Q = \mu' \sin^3 i$ pour chaque couple ⁽²²⁾.
Si de plus $\mu' = \text{const.}$, il vient :

$$\frac{1}{\sin^3 i} \frac{\Sigma Q}{N} = \frac{\mu'}{\sin^3 i} \frac{\Sigma \sin^3 i}{N} = \mu',$$

ce qui démontre la proposition (moyenne *stable* pour N suffisamment grand).

2° Par contre, on ne saurait affirmer que si les étoiles sont sélectionnées d'après leurs masses probables $\mu = Q (1 : \sin^3 i)$, la moyenne de leurs masses vraies soit égale à cette masse probable. En effet :

$$\frac{\Sigma \mu'}{N} = \frac{1}{N} \Sigma \frac{Q}{\sin^3 i} = \frac{1}{N} \Sigma \frac{1}{\sin^3 i} \frac{\mu}{1 : \sin^3 i} = \frac{1}{N (1 : \sin^3 i)} \Sigma \frac{\mu}{\sin^3 i},$$

d'où, avec $\mu = \text{const.}$:

$$\frac{\Sigma \mu'}{N} = \frac{\mu}{(1 : \sin^3 i)} \frac{\Sigma (1 : \sin^3 i)}{N}.$$

Ici, il n'y a pas égalité numérique entre la moyenne *a priori* $(1 : \sin^3 i)$ et la moyenne $\frac{\Sigma (1 : \sin^3 i)}{N}$ particulière aux N étoiles de la sélection, d'après ce que nous savons de l'instabilité de cette moyenne ; de sorte que, les masses vraies étant inconnues, la formule $\mu = Q (1 : \sin^3 i)$ ne peut servir à déterminer la masse moyenne des couples considérés ⁽²³⁾.

32. En définitive, même du point de vue statistique, la formule (14) est seule utilisable pour calculer les masses hypothétiques ; encore ses possibilités d'application sont-elles limitées par la nécessité d'une sélection d'après les masses vraies. Dans la pratique on s'efforcera, faute de mieux, de sélectionner les étoiles d'après une donnée équivalente. Ainsi, l'existence d'une relation masse-luminosité permettra d'utiliser un groupement d'étoiles doubles spectroscopiques ayant même magnitude absolue : tel est le cas, dans un amas, des couples d'égale magnitude apparente. D'une manière analogue, quoique moins stricte, on peut considérer un ensemble de couples de même type spectral (diagramme de RUSSELL). Comme les étoiles doubles spectroscopiques constituent déjà une sélection, où prédominent les types spectraux B et A, avec des magnitudes apparentes souvent comprises entre 4 et 6, il sera possible en général de trouver un assez grand nombre de couples présentant des caractères communs, équivalents à une sélection par rapport aux masses.

Signalons pour terminer, et toujours dans le domaine des applications pratiques, l'emploi que nous ferons des masses hypothétiques $\mu_0 = Q : \sin^3 i$ au calcul des *parallaxes* par la relation masse-luminosité (Chapitre III).

⁽²²⁾ Il est clair que les notations μ et Q peuvent s'appliquer aussi bien à la masse totale d'un couple qu'aux masses individuelles des composantes. On a ici : $Q = Q_1 + Q_2$, etc.

⁽²³⁾ On remarquera l'analogie des deux propositions ci-dessus avec les conditions d'emploi des *parallaxes dynamiques* dont le calcul fait intervenir des moyennes de la forme $(1 : k)$ et $1 : k$. Voir, par exemple, D. BARBIER, *Les étoiles doubles à longue période*, Chap. VI (Thèse, Paris, 1934, et *Bulletin Astronomique*, 2° série, t. VIII, 1933) ou, du même Auteur, *Les parallaxes dynamiques des étoiles doubles* (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, 348, 1936, p. 20 [ligne 14, lire : est égale à cette parallaxe dynamique]).

CHAPITRE II

COUPLES A UN SPECTRE ET PARALLAXE. MAXIMA ET MINIMA DES ÉLÉMENTS ORBITAUX

§ 1. — Méthode. Formules générales.

33. La relation d'Eddington.

Soient μ la masse d'une étoile simple, M sa magnitude absolue visuelle, T sa température effective, H l'indice de chaleur (n° 18). Posons :

$$U = 2 \log \frac{T}{5200} - H, \quad G = M + U;$$

la relation masse-luminosité d'EDDINGTON est de la forme :

$$\mu = f(G) \text{ (1)}.$$

Soient, d'autre part, m la magnitude apparente visuelle et p la parallaxe ; on a la relation classique :

$$(17) \quad M = m + 5 + 5 \log p,$$

ce qui permet d'exprimer G en fonction de données usuelles de l'observation.

Les fonctions $\lambda(G)$ et $\alpha(G)$. — 1° La relation d'EDDINGTON n'est pas linéaire, surtout prise sous la forme $\mu = f(G)$. Il est avantageux d'utiliser la fonction

$$\lambda(G) = \log \mu = \log f(G);$$

en effet, la courbe $\log \mu = \lambda(G)$ a une faible courbure : on peut, dans les applications, en assimiler un arc assez grand à une droite et l'interpolation se trouve facilitée.

2° Pour certains calculs, on met la relation d'EDDINGTON sous une forme qui évoque une fonction linéaire (forme *linéarisée* de M. G. DURAND). On écrit :

$$\lambda(G) = \alpha G + \lambda_0,$$

α étant une fonction de G telle que cette relation soit équivalente à la relation initiale $\mu = f(G)$. L'avantage est que la fonction $\alpha(G)$ varie peu pour les magnitudes habituelles : aussi l'utiliserons-nous pour évaluer l'erreur $\Delta \mu$ sur la masse en fonction de ΔG quand la méthode directe (développement suivant les puissances de ΔG) cesse d'être praticable.

(1) Sur la réduction à la forme $\mu = f(G)$, voir par exemple G. DURAND, *Annales Obs. Toulouse*, t XI, 1935, p. 211.

Tables. — Afin d'assurer l'homogénéité entre nos résultats numériques et ceux que M. G. DURAND a obtenus avant nous, spécialement avec les étoiles doubles spectroscopiques, nous nous sommes servi des Tables publiées par cet Auteur⁽²⁾. L'échelle des températures est celle même d'EDDINGTON, également adoptée par RUSSELL pour les parallaxes dynamiques.

34. Remarque sur le terme U.

Le terme U, fonction de la seule température T (donc du type spectral) donne lieu à une remarque importante pour la solution de notre problème: *pour la plupart des types spectraux, U reste petit en valeur absolue*. Par suite, l'erreur ΔU due à une indétermination sur le type spectral, reste elle-même très petite, souvent négligeable devant l'erreur ΔM (provenant de la parallaxe) sur la magnitude absolue M à laquelle s'ajoute le terme U.

35. Données du problème. Equations de départ.

Soit une étoile double spectroscopique à un seul spectre observé: nous supposons connues la magnitude apparente visuelle totale m de l'astre observé comme une étoile simple et la parallaxe p , donc la magnitude absolue visuelle totale M, d'après (17). Les autres données de l'observation sont: *la fonction des masses*

$$(18) \quad Q = \frac{\mu_2^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2},$$

le type spectral de la composante principale (c'est-à-dire le terme U_1) et le produit $a_1 \sin i$ du demi-grand axe a_1 de l'orbite de cette composante autour du centre de gravité du système, par le sinus de l'inclinaison.

D'une manière générale, nous affecterons des indices 1 et 2 respectivement les éléments qui appartiennent à la composante principale et au compagnon: ainsi M_1 et M_2 désigneront les magnitudes absolues individuelles, tandis que les magnitudes apparentes seront m_1 et m_2 , etc.

Nous laissons de côté, pour l'instant, le demi-grand axe a_1 dont la connaissance est subordonnée à celle de l'inclinaison. Pour déterminer les autres inconnues, une première équation est la relation (18): En appliquant la relation masse-luminosité, $\mu = f(G)$, à chacune des deux composantes, on a d'autre part:

$$(19) \quad \mu_1 = f(G_1), \quad (20) \quad \mu_2 = f(G_2),$$

avec:

$$(21) \quad G_1 = M_1 + U_1, \quad (22) \quad G_2 = M_2 + U_2.$$

Enfin, la dernière équation du problème s'obtient en écrivant que, si les images des deux composantes se confondent en une seule, il y a addition des éclaircissements:

$$(23) \quad 10^{-0,4 M_1} + 10^{-0,4 M_2} = 10^{-0,4 M}.$$

(*) *Annales Obs. Toulouse*, t. XV, 1939, p. 134-135.

On dispose en définitive d'un système de *six* équations à *huit* inconnues, M_1 , M_2 , G_1 , G_2 , U_2 , μ_1 , μ_2 et i .

36. Méthode de résolution.

Nous écartons les méthodes qui visent à compléter les données par des valeurs approchées issues de résultats statistiques, comme celles que pourraient fournir le diagramme de RUSSELL ou l'adoption de valeurs moyennes du rapport des masses, etc.

La méthode que nous proposons ramène le problème à son objet essentiel : la détermination des masses. Elle consiste à exprimer μ_1 et μ_2 en fonction des données et des inconnues auxiliaires M_1 , M_2 , U_2 et i , qu'on traite comme des paramètres, variant chacun séparément entre deux valeurs extrêmes ou *bornes* ; la substitution de ces valeurs bornes dans les équations fournit, pour chacune des masses μ_1 et μ_2 , une borne supérieure et une borne inférieure. Ce résultat préliminaire obtenu, le problème général de la détermination des éléments se présente comme un système d'inégalités simultanées, et la discussion montre que l'application de la relation masse-luminosité aux deux composantes a pour effet de diminuer l'amplitude des variations primitivement assignées aux différentes variables (le facteur $\sin^3 i$ par exemple, qui variait entre *zéro* et *un*, ne peut s'annuler). Désignons par $\underline{u}$ et $\overline{u}$ respectivement le *minimum* et le *maximum* obtenus pour un élément quelconque u ; la solution s'exprimera par des inégalités doubles de la forme :

$$\underline{u} < u < \overline{u}^{(3)},$$

avec $u = \mu_1, \mu_2, M_1, M_2, i$ et a_1 .

37. Cette manière de procéder, si satisfaisante soit-elle par sa rigueur théorique, appelle toutefois une justification : il est clair que la solution ne présentera un intérêt pratique que dans la mesure où l'on aura localisé l'une au moins des inconnues à l'intérieur d'un *intervalle d'incertitude* ($\underline{u}, \overline{u}$) suffisamment réduit, dont l'amplitude $\overline{u} - \underline{u}$ caractérisera la précision de la méthode relativement à cette inconnue. De fait, nous obtiendrons des renseignements assez précis sur les masses, grâce aux propriétés numériques de deux des paramètres qui servent à les calculer :

a) le terme U_2 , dont l'indétermination aura peu d'influence sur la précision de la masse μ_2 (n° 34) ;

b) la magnitude M_1 de la composante la plus brillante, qui jouit de la propriété remarquable d'osciller entre des bornes très voisines. Cette propriété, qui nous permettra une bonne détermination de la masse μ_1 , sera le point de départ de nos calculs.

38. Réduction du système d'équations.

Etant donnée une étoile double spectroscopique de magnitude absolue totale M , il s'agit de déterminer les intervalles de variation respectifs des magnitudes individuelles M_1 et M_2 ,

(³) On évitera de confondre la notation $\overline{u}$ qui désignera, dans tout ce qui suit, le *maximum* d'une quantité u , avec la notation analogue employée dans le Chapitre I pour représenter la valeur moyenne.

liées à M par (23). On peut rendre cette relation plus générale en remplaçant M_1 et M_2 par les variables x et y telles que

$$M_1 = M + x, \quad M_2 = M + y;$$

L'équation (23) devient :

$$(24) \quad 10^{-0,4x} + 10^{-0,4y} = 1.$$

Le paramètre M est ainsi éliminé, et l'équation (24), équivalente à (23), est indépendante des données numériques, donc applicable au problème quelle que soit l'étoile double spectroscopique considérée.

Les équations (19) et (20) prennent la forme :

$$(25) \quad \mu_1 = f(M + x + U_1), \quad (26) \quad \mu_2 = f(M + y + U_2),$$

de sorte que nous sommes ramenés à un système de quatre équations, (18), (24), (25) et (26), à cinq inconnues x , y , μ_1 , μ_2 et $\sin^3 i$, le terme U_2 étant considéré provisoirement comme une donnée.

Si l'on suppose l'équation (24) résolue par rapport à y , on a :

$$(27) \quad y = y(x) \equiv x - 2,5 \log(10^{0,4x} - 1)$$

et la résolution du système est subordonnée à la connaissance de la seule quantité x .

39. La fonction $y(x)$.

Soient z et Z respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs x et y (toujours positives) qui satisfont à (24). Par symétrie, (24) est vérifiée par les deux couples de valeurs $x = z$, $y = Z$ et $x = Z$, $y = z$. Il suffit donc, pour avoir tous les couples (z, Z) , de prendre z comme variable indépendante, qu'on fait varier depuis zéro jusqu'à son maximum ζ donné par $z = Z$, soit :

$$\zeta = 2,5 \log 2 = 0,753.$$

On a donc :

$$(28) \quad z \leq 2,5 \log 2 \leq Z.$$

Calcul numérique. — Dans les applications, le passage de l'une à l'autre des quantités x et y se fait au moyen d'une Table donnant $y(x)$ d'après (27). Le calcul numérique de $y(x)$ est d'ailleurs immédiat par l'emploi des *logarithmes de soustraction*, dont la Table

(ZECH, HOUEL,...) fournit $\log \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ en fonction de $\log \alpha$. Posant :

$$0,4x = \log \alpha, \quad 0,4y = \log \beta,$$

on a $\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$, de sorte qu'il suffit d'entrer dans la Table avec l'argument $0,4x$ pour avoir aussitôt $\log \beta$, d'où y .

40. Propriétés fondamentales des magnitudes individuelles.

Il faut distribuer les valeurs z et Z à chaque composante. Pour cela, on considérera comme évident que le spectre observé appartient à la composante la plus brillante. La com-

posante principale, définie plus haut comme celle dont on connaît le type spectral, est donc aussi celle dont la magnitude *visuelle* (apparente ou absolue) est la plus faible, soit :

$$m_1 < m_2, \quad M_1 < M_2, \quad x < y;$$

d'où, d'après (28) :

$$x = z, \quad y = Z.$$

Cela posé, la double inégalité (28) s'écrit :

$$0 < x \leq \zeta, \quad y \geq \zeta.$$

On en déduit les propriétés suivantes ⁽⁴⁾ :

1° Si deux étoiles apparaissent à l'observation comme une étoile simple de magnitude apparente m on a, en désignant respectivement par m_1 et m_2 les magnitudes de la plus brillante et de la plus faible :

$$m < m_1 \leq m + \zeta, \quad m_2 \geq m + \zeta;$$

2° Si deux étoiles forment un système binaire (ou plus généralement si elles ont même parallaxe) ces relations subsistent quand on substitue les magnitudes absolues aux magnitudes apparentes :

$$(29) \quad M < M_1 \leq M + \zeta, \quad M_2 \geq M + \zeta.$$

3° En particulier, étant donné un couple spectroscopique de magnitude absolue totale M , la magnitude absolue M_1 de la composante principale est supérieure à M , mais ne peut excéder M que d'une petite quantité, au plus égale à 0,753. La magnitude absolue M_2 du compagnon admet une borne inférieure égale à $M + 0,753$, qui coïncide avec la borne supérieure de M_1 .

Avec les notations définies au n° 36, on a donc :

$$(30) \quad \underline{M}_1 = M, \quad \overline{M}_1 = \underline{M}_2 = M + \zeta.$$

41. Masse de la composante principale. Maximum et minimum absolus. ⁽⁵⁾

Reprenons la formule (25) qui définit μ_1 comme une fonction *décroissante* de la variable x . La propriété, pour x , de varier dans un intervalle de faible amplitude (0, ζ) entraîne dans l'application de la relation masse-luminosité une conséquence importante : la masse de la composante principale se trouve elle aussi localisée à l'intérieur d'un faible intervalle, délimité par les masses maxima et minima :

$$(31) \quad \overline{\mu}_1 = f(M + U_1), \quad \underline{\mu}_1 = f(M + U_1 + \zeta).$$

⁽⁴⁾ Les propriétés fondamentales ici énoncées sont contenues dans le Mémoire cité de M. G. DURAND (*Annales Obs. Toulouse*, t. XI, 1935, p. 215, en Note). Ce sont spécialement ces propriétés que M. G. DURAND avait signalées à notre attention pour fonder la recherche de nouvelles applications de la relation masse-luminosité aux étoiles doubles spectroscopiques.

⁽⁵⁾ L'application ultérieure de la relation masse-luminosité à la seconde composante ayant pour effet de modifier certains résultats préliminaires, nous appellerons maximum et minimum *absolus* ceux qu'on obtient en appliquant la relation à la seule composante principale, ou qui sont indépendants de la relation masse-luminosité : par exemple, les bornes définies par les formules (30) et (31). Ces bornes absolues, qui servent de base à la solution, doivent être distinguées des maxima et minima *effectifs* (plus resserrés) qu'on établira par la suite.

On aura une idée de l'intervalle $\overline{\mu_1} - \underline{\mu_1}$ d'après le tableau ci-après, qui fait connaître $\overline{\mu_1}$ et $\underline{\mu_1}$ pour quelques valeurs entières de l'argument $M + U_1$. Comme l'amplitude de cet intervalle doit être appréciée comparativement à la masse, nous avons explicité l'écart relatif $\delta\mu_1/\mu_1$, obtenu en adoptant pour μ_1 la moyenne entre les bornes, $(\overline{\mu_1} + \underline{\mu_1}/2)$, et pour écart absolu la différence $\delta\mu_1$ entre cette moyenne et chaque borne, soit $(\overline{\mu_1} - \underline{\mu_1}/2)$, de sorte que

$$\frac{\delta\mu_1}{\mu_1} = \frac{\overline{\mu_1} - \underline{\mu_1}}{\overline{\mu_1} + \underline{\mu_1}}.$$

$M + U_1 =$	-4	-2	0	+2	+4	+8	+12
$\overline{\mu_1} =$	20,5	8,04	3,71	1,98	1,17	0,472	0,201
$\underline{\mu_1} =$	14,2	5,90	2,90	1,62	0,980	0,402	0,172
$\frac{\delta\mu_1}{\mu_1} =$	0,18	0,15	0,12	0,10	0,088	0,080	0,078

On voit que le rapport $\delta\mu_1/\mu_1$, qui caractérise la précision⁽⁶⁾, reste de l'ordre de 10 p. cent pour les magnitudes courantes.

42. Masse du compagnon.

Pour nous renseigner sur la masse du compagnon, nous disposons de la fonction des masses (18) qui permet d'exprimer μ_2 en fonction de Q et des deux paramètres $\mu_1, \sin^3 i$ assujettis l'un et l'autre à varier entre des bornes connues. Il s'agit de résoudre l'équation (18) par rapport à μ_2 . Posons pour abréger :

$$\sin^3 i = \theta;$$

la relation (18) s'écrit :

$$(32) \quad \theta\mu_2^3 - Q(\mu_2 + \mu_1)^2 = 0,$$

équation du troisième degré qui admet une seule racine réelle, toujours positive. La formule classique de CARDAN donne :

$$(33) \quad \mu_2 = \frac{Q}{3\theta} + \left(\frac{Q}{2\theta}\right)^{\frac{1}{3}} \left[(A + B)^{\frac{1}{3}} + (A - B)^{\frac{1}{3}} \right],$$

avec :

$$(34) \quad A = \frac{2}{27} \left(\frac{Q}{\theta}\right)^2 + \frac{2}{3} \frac{Q}{\theta} \mu_1 + \mu_1^2, \quad B^2 = \left(\frac{4}{27} \frac{Q}{\theta} + \mu_1\right) \mu_1^3.$$

Minimum absolu. — La formule (33) définit μ_1 comme une fonction de deux variables, μ_1 et θ . Pour connaître les variations de μ_2 , il suffit de différentier la relation (32); on a les dérivées partielles :

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_1} = \frac{2\mu_2}{3\mu_1 + \mu_2}, & \text{toujours} > 0; \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \theta} = -\frac{\mu_1 + \mu_2}{3\mu_1 + \mu_2} \frac{\mu_2}{\theta}, & \text{toujours} < 0. \end{cases}$$

(6) Indépendamment des erreurs provenant des données.

Le minimum de μ_2 s'obtiendra donc en faisant dans (33) μ_1 minimum et θ maximum, c'est-à-dire $\mu_1 = \underline{\mu}_1$ (soit $x = \zeta$) et $\theta = 1$ (soit $i = 90^\circ$). Substituons dans (33); le *minimum absolu* cherché $\underline{\mu}_2$ s'exprime par la formule analogue :

$$(36) \quad \underline{\mu}_2 = \frac{Q}{3} + \left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \left[(\underline{A} + \underline{B})^{\frac{4}{3}} + (\underline{A} - \underline{B})^{\frac{4}{3}} \right],$$

avec :

$$\underline{A} = \frac{2}{27} Q^2 + \frac{2}{3} Q \underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_1^2, \quad \underline{B}^2 = \left(\frac{4}{27} Q + \underline{\mu}_1\right) \underline{\mu}_1^3.$$

Masse maxima. — La formule (33) est impropre à déterminer une valeur maxima de μ_2 , la variable θ pouvant décroître jusqu'à zéro. Mais l'application de la relation masse-luminosité à la seconde composante permet d'atteindre ce but, en faisant jouer l'inégalité $M_2 \geq M + \zeta$ non encore utilisée.

En effet, la masse « eddingtonienne » $\mu_2 = f(M + U_2 + y)$ est une fonction décroissante des paramètres U_2 et y . On rend minimum l'argument en prenant d'abord $y = \zeta$. Connaissant d'autre part le terme U pour les différents types spectraux, on peut se donner une valeur minima $\underline{U}$ (7). La masse maxima $\underline{\mu}_2$ a pour expression :

$$(37) \quad \underline{\mu}_2 = f(M + \underline{U} + \zeta).$$

43. Condition de possibilité.

Le minimum et le maximum de μ_2 s'obtenant par des formules indépendantes, (36) et (37), on n'est pas assuré *a priori* de la compatibilité des résultats. Pour que l'inégalité $\underline{\mu}_2 < \mu_2$ soit satisfaite, les données du problème doivent vérifier certaines conditions que nous allons préciser.

Soit G_0 un nombre homogène à une magnitude, déduit de $\underline{\mu}_2$ par la relation d'EDDINGTON :

$$\mu_2 = f(G_0);$$

d'après (37) on doit avoir $G_0 > M + \underline{U} + \zeta$, où :

$$(38) \quad \underline{U} < G_0 - M - \zeta.$$

Cette condition exprime que les formules (36) et (37) sont compatibles; en d'autres termes, qu'il existe des valeurs des quatre variables x , θ , U_2 et y permettant de calculer, soit par les formules (33), (34) et (25), soit par (26), une valeur de μ_2 comprise entre $\underline{\mu}_2$ et μ_2 .

(7) Les valeurs les plus basses du terme U , qui correspondent au type spectral M , sont mal délimitées vers l'extrémité de la série spectrale: aussi est-il difficile d'indiquer avec précision une valeur minima. Néanmoins, on peut toujours trouver un nombre $\underline{U}$ inférieur aux valeurs de U les plus faibles qu'on rencontre dans la pratique, et la possibilité de ce choix, même arbitraire, suffit pour la question qui nous occupe. La formule (37) a donc toujours un sens, sous réserve de ne pas lui demander de définir pour μ_2 une borne supérieure aussi peu élevée que possible.

La condition de possibilité, mise sous la forme (38), permet de prévoir si l'on pourra appliquer la relation masse-luminosité au compagnon pour en déduire μ_2 avec une valeur $\underline{U}$ immédiatement inférieure aux valeurs courantes du terme U . En effet, elle revient à assigner à U_2 , pour chaque couple, une limite supérieure, $G_0 - M - \zeta$, qu'il faut comparer aux valeurs réelles de U . Trois cas peuvent se présenter :

a) En général, on a $G_0 > M + \zeta$. Le plus souvent, G_0 excède M de plusieurs unités de magnitude. Le second nombre de (38) étant alors > 0 , tandis que les valeurs basses de U sont < 0 , la condition est largement satisfaite ;

b) Il arrive parfois que $G_0 - M - \zeta, > 0$ ou < 0 , soit du même ordre de grandeur que le terme U . On a :

$$G_0 - M - \zeta \geq \underline{U}.$$

Le calcul de $\underline{\mu}_2$ est encore possible, mais on doit considérer le cas limite où $G_0 - M - \zeta$ est < 0 et assez fort en valeur absolue pour pouvoir être confondu avec $\underline{U}$. Alors :

$$G_0 - M - \zeta = \underline{U} = U_2, \quad \text{d'où :} \quad \mu_2 = \underline{\mu}_2 = \overline{\mu}_2 = f(G_0).$$

Ce calcul implique :

$$M_1 = M_2 = M + \zeta; \quad \mu_1 = \underline{\mu}_1 = f(M + U_1 + \zeta); \quad \theta = 1, \quad i = 90^\circ.$$

Telles sont les conditions imposées aux autres variables du fait qu'on applique encore valablement la relation masse-luminosité à la seconde composante : dans ce cas particulier, toutes les inconnues sont déterminées ;

c) Exceptionnellement, on trouvera pour $G_0 - M - \zeta$ une valeur < 0 très inférieure à celles du terme U , même pour des types spectraux avancés tels que M7. Les formules (36) et (37) deviennent incompatibles : soit parce que les données sont trop inexactes (en particulier la magnitude absolue totale M , à cause d'une parallaxe défectueuse), soit pour une raison physique. Dans cette dernière éventualité, c'est-à-dire quand il n'y a pas lieu de suspecter la parallaxe ou la fonction des masses, on admettra que la relation masse-luminosité s'applique à la composante principale plutôt qu'au compagnon, dont on ignore les caractéristiques spectrales. Les formules (31) et (36) gardent alors leur validité, et la borne inférieure absolue $\underline{\mu}_2$ prévaudra sur la borne supérieure μ_2 qui suppose la relation d'EDDINGTON applicable aussi au compagnon. Si donc on trouve $\underline{\mu}_2 < \mu_2$, c'est $\underline{\mu}_2$ qui est à rejeter. En toute rigueur, on doit conclure que la relation masse-luminosité ne s'applique pas au moins à l'une des deux composantes.

Autre forme de la condition de possibilité. — On peut donner à la condition (38) une autre forme, en remarquant que comparer G_0 à $M + \zeta$ revient à comparer entre elles les deux données fondamentales du problème, M et Q . Plus exactement, il s'agit de comparer Q à une certaine fonction de M , soit $\Phi(M)$, homogène comme Q à une masse. On doit avoir par exemple :

$$Q \leq \Phi(M).$$

Pour connaître $\Phi(M)$ nous nous servirons de la relation initiale (18) : la présence du

facteur $\sin^3 i \leq 1$ impose que les masses calculées satisfassent à la condition

$$Q (\mu_1 + \mu_2)^2 \leq \mu_2^3,$$

ce qui sera le cas pour $\mu_1 = \underline{\mu}_1$ et pour toute valeur de μ_2 au moins égale à $\underline{\mu}_2$. Ecrivons que la masse $\underline{\mu}_2$ figure parmi ces valeurs; il vient:

$$Q [f(M + U_1 + \zeta) + f(M + \underline{U} + \zeta)]^2 \leq [f(M + \underline{U} + \zeta)]^3,$$

d'où:

$$(39) \quad \Phi(M) = \frac{[f(M + \underline{U} + \zeta)]^3}{[f(M + U_1 + \zeta) + f(M + \underline{U} + \zeta)]^2}.$$

Cas ordinairement réalisé. — Dans la pratique, on dispose d'un moyen simple de s'assurer si $\underline{\mu}_2 > \underline{\mu}_2$, avant de calculer G_0 . Il suffit de comparer $\underline{\mu}_2$ à $\underline{\mu}_1$ en remarquant que, par définition même de $\underline{U}$, on a toujours:

$$M + U_1 + \zeta > M + \underline{U} + \zeta, \quad f(M + U_1 + \zeta) < f(M + \underline{U} + \zeta),$$

c'est-à-dire $\underline{\mu}_1 < \underline{\mu}_2$. La condition $\underline{\mu}_2 < \underline{\mu}_2$ sera donc réalisée *a fortiori* toutes les fois qu'on trouvera $\underline{\mu}_2 \leq \underline{\mu}_1$, inégalité qu'on ramène à la forme $Q \leq \Phi(M)$ en substituant, dans (39), $f(M + U_1 + \zeta)$ à $f(M + \underline{U} + \zeta)$. Il vient:

$$Q \leq \frac{1}{4} f(M + U_1 + \zeta), \quad \text{soit :} \quad Q \leq \frac{1}{4} \mu_1.$$

Donc, si l'on trouve $\underline{\mu}_1 \geq 4Q$, on a la certitude de pouvoir calculer validement la borne supérieure $\underline{\mu}_2$. C'est là un cas important, très souvent réalisé dans les applications, et que nous retrouverons plus loin, dans l'hypothèse $U_2 = U_1$ (n° 53). En définitive, on n'aura recours à la quantité $G_0 - M - \zeta$ que pour les couples tels que $\underline{\mu}_1 < 4Q$.

44. Les fonctions $g(x, U_2)$ et $h(x, \theta)$.

La solution complète du problème nous sera fournie par la considération simultanée des formules (26) et (33). Chacune d'elles définit μ_2 comme une fonction de deux variables: y et U_2 d'une part, μ_1 et θ d'autre part. Mais, comme $y = y(x)$ et $\mu_1 = f(M + x + U_1)$, la variable indépendante x est commune aux deux relations, de sorte qu'on peut représenter μ_2 par l'une ou l'autre des expressions:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x, U_2) \equiv f[M + U_2 + y(x)], \\ h(x, \theta) \equiv \frac{Q}{3\theta} + \left(\frac{Q}{2\theta}\right)^{\frac{1}{3}} \left[(A + B)^{\frac{1}{3}} + (A - B)^{\frac{1}{3}} \right], \end{array} \right.$$

A et B étant des fonctions de x et θ , d'après (34) et (25).

Supposons la condition $\underline{\mu}_2 > \underline{\mu}_2$ réalisée. Tout système de valeurs x, U_2, θ , satisfaisant

à l'équation :

$$(41) \quad g(x, U_2) = h(x, \theta)$$

permet de calculer μ_2 avec les formules (26) ou (33). Finalement, pour connaître toutes les valeurs acceptables des variables en jeu (dont l'ensemble constitue la solution) il faut étudier les variations des fonctions g et h quand x , U_2 et θ prennent toutes les valeurs possibles.

On a les dérivées partielles suivantes, dont les signes sont évidents puisque les fonctions $f(G)$ et $y(x)$ sont décroissantes et qu'on connaît déjà, par (35), les dérivées $\frac{\partial h}{\partial \mu_1}$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f'[M + U_2 + y(x)] y'(x), & \text{toujours} > 0, \\ \frac{\partial g}{\partial U_2} &= f'[M + U_2 + y(x)], & \text{toujours} < 0; \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial \mu_1} \frac{d\mu_1}{dx} = \frac{2\mu_2}{3\mu_1 + \mu_2} f'(M + U_1 + x), & \text{toujours} < 0, \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} &= -\frac{\mu_1 + \mu_2}{3\mu_1 + \mu_2} \frac{\mu_2}{\theta}, & \text{toujours} < 0. \end{aligned}$$

On voit que la masse *eddingtonienne* du compagnon, $g(x, U_2)$, est une fonction croissante de x , qui s'annule (théoriquement) avec x pour atteindre, quand $x = \zeta$, le maximum relatif $f(M + U_2 + \zeta)$, lequel devient maximum maximorum pour $U_2 = \underline{U}$ (d'où alors : $g = \overline{\mu_2}$). Par contre, la masse *orbitale*, $h(x, \theta)$, décroît quand x varie de 0 à ζ , depuis un maximum, $h(0, \theta)$ jusqu'à un minimum, $h(\zeta, \theta)$, relatifs à la valeur θ (d'où, avec $\theta = 1$, le minimum minimorum $h = \underline{\mu_2}$). Soient alors deux axes rectangulaires Ox , $O\mu$: tout système de valeurs U_2 , θ , choisies à l'avance, permet de construire deux courbes, $\mu_2 = g(x, U_2)$ et $\mu_2 = h(x, \theta)$, qui se coupent en général au point (x, μ_2) représentatif de la solution. Nous en déduirons plus loin l'interprétation graphique de la solution générale du problème.

45. Maxima et minima effectifs des magnitudes individuelles.

Considérons la masse μ_2 caractérisée par un système de valeurs U_2 et θ des paramètres et par le couple (x, y) , x étant racine de (41). Nous avons défini jusqu'ici les bornes $\overline{\mu_2}$ et $\underline{\mu_2}$ obtenues avec $U_2 = \underline{U}$, $\theta = 1$ et le couple $x = y = \zeta$. Mais on peut également associer à μ_2 un maximum et un minimum relatifs au couple (x, y) en remplaçant, dans (41), U_2 par $\underline{U}$ et θ par 1. On a :

$$(42) \quad g(x, \underline{U}) > \mu_2 > h(x, 1).$$

Soient alors, à partir de $x = y = \zeta$, des valeurs décroissantes de la variable indépendante x . D'après le signe des dérivées $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}$, les bornes relatives $g(x, \underline{U})$ et $h(x, 1)$ vont respectivement diminuer et augmenter à partir de leurs valeurs initiales

$$g(\zeta, \underline{U}) = \overline{\mu_2}, \quad h(\zeta, 1) = \underline{\mu_2},$$

jusqu'à devenir identiques pour une certaine valeur $\underline{x}$ racine de l'équation :

$$(43) \quad g(x, \underline{U}) = h(x, 1).$$

On déduit donc de l'application de la relation masse-luminosité aux 2 composantes un minimum non nul $\underline{x}$ de la variable x , et par conséquent un maximum fini $\bar{y}$ de $y(x)$ ⁽⁸⁾.

Les maxima et minima *effectifs* des magnitudes individuelles M_1 et M_2 sont alors définis par les inégalités :

$$(44) \quad M + \underline{x} < M_1 < M + \zeta, \quad M + \zeta < M_2 < M + \bar{y},$$

qui doivent être substituées aux inégalités de départ (29).

46. Résolution de l'équation (43).

On utilise la méthode des approximations successives, en partant d'une valeur quelconque x_0 de l'inconnue x . On calcule d'abord par la relation d'EDDINGTON :

$$\mu(x_0) = f(M + U_1 + x_0),$$

d'où l'on tire, avec la seconde formule (40) où $\theta = 1$, une valeur approchée du second membre de (43), soit :

$$h(x_0, 1) = h_0.$$

L'équation (43) devient :

$$f(M + \underline{U} + y) = h_0.$$

On détermine ensuite G_0 tel que $f(G_0) = h_0$ et l'on a :

$$y = y_1 = G_0 - M - \underline{U},$$

d'où la deuxième approximation $x_1 = x(y_1)$ qu'on substitue à x_0 pour calculer h_1 , et ainsi de suite. D'une manière générale

$$f(M + \underline{U} + y_n) = h_{n-1}.$$

Les approximations se font alternativement par excès et par défaut. Partant, par exemple, de $x_0 = \zeta$, on a :

$$\mu(x_0) = \underline{\mu}_1, \quad h_0 = \underline{\mu}_2,$$

et G_0 n'est autre que le G_0 déjà considéré au n° 43, lequel peut être pris comme valeur de départ, approchée par excès.

On continue les approximations jusqu'à ce que la différence $y_n - y_{n-1}$ devienne inférieure à la plus petite fraction de magnitude appréciable, soit, avec la précision habituelle :

$$|y_n - y_{n-1}| < 0,01 \text{ magnitude};$$

comme on a toujours

$$|y_n - y_{n-1}| > |x_n - x_{n-1}|,$$

(8) La fonction $g(x, \underline{U})$ tendant vers zéro avec x , tandis que $h(x, 1)$ reste fini, on a $g < h$ pour x suffisamment petit (quels que soient d'ailleurs $\underline{U}_2$ et θ). La racine $\underline{x}$ de l'équation (43) existe donc réellement et n'est jamais nulle.

on est alors assuré d'avoir $|x_n - x_{n-1}| < 0,01$, de sorte que x et y sont complètement déterminés.

Convergence. — Mettons l'équation (43) sous la forme $F(x) = 0$. Il vient, en simplifiant l'écriture :

$$F(x) \equiv g(x) - h(x) = 0.$$

Les approximations successives $x_0, x_1, \dots, x_n$ seront convergentes si $F(x_n)$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. On doit avoir :

$$|g(x_n) - h(x_n)| < |g(x_{n-1}) - h(x_{n-1})|.$$

Comme nous avons opéré en prenant $g(x_n) = h(x_{n-1})$, la condition devient :

$$|h(x_{n-1}) - h(x_n)| < |g(x_{n-1}) - g(x_n)|,$$

soit, en désignant les deux membres par Δh et Δg (valeurs absolues des différences) :

$$\frac{\Delta h}{\Delta g} < 1.$$

De fait, cette inégalité se trouve réalisée dans tout l'intervalle de variation de x , parce que la fonction $g(x)$ croît rapidement de zéro à μ_2 (ce maximum étant assez élevé à cause de la valeur basse de $\underline{U}$) tandis que $h(x)$ varie très peu avec x , qui lui-même varie peu. C'est dire que la fonction $g(x)$ est beaucoup plus croissante que $h(x)$ n'est décroissante, d'où $\Delta g > \Delta h$.

D'une manière plus précise, pour les petites valeurs de Δx , on a au second ordre près (et sans se préoccuper des signes), d'après les résultats du n° 44 :

$$\frac{\Delta h}{\Delta g} = \frac{h'(x)}{g'(x)} = \frac{2\mu_2}{3\mu_1 + \mu_2} \frac{f'(M + \underline{U}_1 + x)}{f'[\underline{M} + \underline{U} + y(x)]} \frac{1}{y'(x)}.$$

Des trois facteurs du dernier membre, le second diffère peu de l'unité, mais $\frac{2\mu_2}{3\mu_1 + \mu_2}$, qui est une fonction croissante du rapport des masses μ_2/μ_1 , atteint à peine la valeur $1/2$ pour $\mu_2 = \mu_1$; et comme en général μ_2 est nettement inférieur à μ_1 chez les couples à un seul spectre observé, ce premier facteur est d'ordinaire très petit. Il en est de même du troisième, $\frac{1}{y'(x)}$, égal en valeur absolue à $10^{0,4x} - 1$, qui tend vers zéro avec x . Or, on constate dès le début du calcul que $\underline{x}$ est bien plus proche de 0 que de ζ : ainsi, non seulement la condition $\Delta h < \Delta g$ se trouve satisfaite, mais le facteur $\frac{1}{y'(x)}$, prépondérant, assure une convergence très rapide des approximations successives.

47. Maximum effectif de la masse de la composante principale.

Revenons aux inégalités (44) qui restreignent le champ de variation primitivement assigné aux magnitudes individuelles M_1 et M_2 . En particulier, le minimum de M_1 est $M + \underline{x}$ au

lieu de M : on en déduit le *maximum effectif* de μ_1 :

$$(45) \quad \overline{\mu'_1} = f(M + U_1 + \underline{x}).$$

On a $\overline{\mu'_1} < \overline{\mu_1}$: l'application de la relation masse-luminosité au compagnon a pour effet d'abaisser le maximum de la masse de la composante principale ; son minimum reste inchangé.

48. Minimum effectif de la masse du compagnon.

De l'application de la relation masse-luminosité au compagnon, nous avons déduit une masse maxima $\overline{\mu_2} = g(\zeta, \underline{U})$ et, en fonction de x , une *frontière supérieure* $g(x, \underline{U})$ ⁽⁹⁾. Mais comme le terme U passe par un maximum, $\overline{U} = +0,33$ pour le type spectral A5⁽¹⁰⁾, la relation d'EDDINGTON impose aussi à la masse μ_2 une *frontière inférieure* :

$$g(x, \overline{U}) = f[M + \overline{U} + y(x)],$$

qui doit être prise en considération au même titre que la frontière $h(x, 1)$ issue de la fonction des masses. On a donc, compte tenu de la seconde inégalité (42), la double condition :

$$\mu_2 > h(x, 1), \quad \mu_2 > g(x, \overline{U}).$$

Pour connaître le minimum effectif de μ_2 , il faut comparer $g(x, \overline{U})$ à $h(x, 1)$, c'est-à-dire chercher le signe de la différence $g - h$ dans tout l'intervalle de variation de x . Or, quand x croît de zéro à ζ , $g(x, \overline{U})$ croît de zéro à $g(\zeta, \overline{U})$, tandis que $h(x, 1)$ décroît de $h(0; 1)$ à $h(\zeta, 1) = \underline{\mu_2}$. Pour les petites valeurs de x on a donc $h > g$, et le minimum relatif de μ_2 est imposé par la fonction h , jusqu'à ce que x atteigne la valeur ξ , racine de l'équation :

$$(46) \quad g(x, \overline{U}) = h(x, 1).$$

Si cette racine existe, on a $g > h$ pour $x > \xi$, de sorte que $h(x, 1)$ devenant incompatible avec la relation masse-luminosité, c'est $g(x, \overline{U})$ qui impose la limite inférieure. En définitive, la frontière inférieure *effective* de μ_2 est déterminée par $h(x, 1)$ pour $x < \xi$ et par $g(x, \overline{U})$ pour $x > \xi$. Pour $x = \xi$, on a le *minimum effectif* :

$$\underline{\mu'_2} = g(\xi, \overline{U}) = h(\xi, 1).$$

Condition d'existence. — La différence $g - h$ étant maxima quand $x = \zeta$, la racine

(9) Le mot *frontière* est employé ici par analogie avec *borne*, pour désigner la fonction d'une seule variable (x par exemple) déduite de $g(x, U_2)$ ou $h(x, \theta)$ quand on remplace l'autre variable (U_2 ou θ) par sa borne inférieure ou supérieure. Une frontière représente donc tous les maxima ou minima *relatifs* issus de $U_2 = U$, $\theta = 1$, etc. Graphiquement, elle sera figurée par l'une des courbes extrêmes d'une famille à un paramètre.

(10) Tandis que le choix de $\underline{U}$ présentait une part d'arbitraire, le maximum $\overline{U}$ est théoriquement défini par la condition $\frac{dU}{dT} = 0$, qui se trouve réalisée pour $T = 8500^\circ$ environ, c'est-à-dire au voisinage de A5.

ξ existera si $g - h$ devient > 0 pour $x \leq \zeta$. Il faut donc :

$$g(\zeta, \bar{U}) > h(\zeta, 1), \quad \text{c'est-à-dire : } f(M + \bar{U} + \zeta) > \underline{\mu}_2.$$

et comme nous avons posé $\underline{\mu}_2 = f(G_0)$, cette inégalité est équivalente à :

$$(47) \quad \bar{U} < G_0 - M - \zeta.$$

La discussion de l'inégalité (47) est analogue à celle du n° 43 à propos de la condition générale de possibilité (38) : il suffit d'y remplacer $\underline{U}$ par $\bar{U} = +0,33$.

a. Dans le cas général où $G_0 - M - \zeta > 0$ est de l'ordre de quelques unités de magnitude, la condition (47) est satisfaite, presque aussi largement que (38). L'équation (46) admet une racine ξ qui définit le minimum effectif de μ_2 :

$$(48) \quad \underline{\mu}'_2 = f[M + \bar{U} + y(\xi)],$$

et l'on a :

$$\underline{x} < \xi < \zeta, \quad y(\xi) < \bar{y}, \quad \underline{\mu}'_2 > \underline{\mu}_2;$$

l'intervalle d'incertitude sur la masse du compagnon, égal à $\bar{\mu}_2 - \underline{\mu}'_2$, est donc moindre que l'écart initial $\bar{\mu}_2 - \underline{\mu}_2$ entre les bornes absolues ;

b. Si $G_0 - M - \zeta = \bar{U}$, la racine ξ vient se confondre avec ζ ; donc :

$$\underline{\mu}'_2 = \underline{\mu}_2 = f(M + \bar{U} + \zeta);$$

le minimum effectif s'identifie avec le minimum absolu ;

c. Par exception, on peut rencontrer des valeurs assez basses de $G_0 - M - \zeta$, telles que la condition de possibilité (38) se trouve satisfaite, sans qu'il en soit de même de (47). On a :

$$\underline{U} < G_0 - M - \zeta < \bar{U}.$$

La différence $h(x, 1) - g(x, \bar{U})$ est > 0 quel que soit x ; et $h(x, 1)$, compatible avec la relation d'EDDINGTON dans tout l'intervalle $(\underline{x}, \zeta)$, représente la frontière inférieure effective de μ_2 . Le minimum effectif est $\mu_2 = h(\zeta, 1)$.

Remarque. — Dans cette dernière éventualité, on a pour $x = \zeta$:

$$f(M + \underline{U} + \zeta) > \mu_2 > \underline{\mu}_2 > f(M + \bar{U} + \zeta).$$

Considérons des valeurs croissantes de U_2 , depuis $\underline{U}$ jusqu'à $\bar{U}$, en passant par la valeur particulière

$$U_0 = G_0 - M - \zeta;$$

toutes les masses eddingtoniennes comprises entre $f(M + U_0 + \zeta)$ et $f(M + \bar{U} + \zeta)$ sont à rejeter comme inférieures à $\underline{\mu}_2$. Donc, quand la relation d'EDDINGTON est encore applicable à la seconde composante malgré la petitesse de U_0 , il y a une condition restrictive à cette application, puisqu'on doit supposer $U_2 < U_0$.

Résolution de l'équation (46). — Nous n'y insisterons pas, vu l'analogie avec (43). On opère

par approximations successives, en choisissant au mieux la valeur de départ ξ_0 d'après la remarque suivante : si $G_0 - M - \zeta$ excède de peu $\bar{U}$, la racine ξ est voisine de ζ et l'on prend $\xi_0 = \zeta$; par contre, si $G_0 - M - \zeta$ est fort, ξ est voisin de minimum $\underline{x}$ et l'on part de $\xi_0 = \underline{x}$. Ce dernier cas est le plus fréquent, comme nous l'avons signalé.

49. Minimum de l'inclinaison.

Reprenons la relation (32) qui définit $\theta = \sin^3 i$ comme une fonction des deux variables μ_1 et μ_2 , dont nous connaissons les maxima et minima effectifs. Les dérivées partielles de θ ayant un signe constant :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu_1} = \frac{2\theta}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \text{toujours} > 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu_2} = -\frac{3\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\theta}{\mu_2}, \quad \text{toujours} < 0,$$

on en déduit tout d'abord que, pour une valeur déterminée de μ_2 , θ est minimum relatif si $\mu_1 = \underline{\mu}_1$, soit $x = \zeta$ et $\mu_2 = h(\zeta, \theta)$. Considérant alors des valeurs croissantes de μ_2 , θ devient minimum minimorum quand μ_2 atteint (toujours avec le couple $x = y = \zeta$) son maximum $\bar{\mu}_2 = f(M + \bar{U} + \zeta)$. Le *minimum effectif* $\underline{i}$ de l'inclinaison est donc défini par :

$$\sin^3 \underline{i} = \underline{\theta} = Q \frac{(\underline{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)^2}{\bar{\mu}_2^3}.$$

Explicitons les données M et U_1 ; il vient, d'après (39) :

$$\sin^3 \underline{i} = Q \frac{[f(M + U_1 + \zeta) + f(M + \bar{U} + \zeta)]^2}{[f(M + \bar{U} + \zeta)]^3} = \frac{Q}{\Phi(M)},$$

et, en écrivant que $\sin^3 i$ est au plus égal à l'unité, on retrouve la condition de possibilité sous la forme $Q \leq \Phi(M)$.

50. Maximum du demi-grand axe.

Parmi les données qui nous intéressent figure encore le produit (cf. n° 35) :

$$l_1 = a_1 \sin i.$$

Avec $\sin i$ minimum on obtient a_1 maximum :

$$\bar{a}_1 = \frac{l_1}{\sin \underline{i}} = \frac{l_1}{Q^{\frac{1}{3}}} \frac{f(M + \bar{U} + \zeta)}{[f(M + U_1 + \zeta) + f(M + \bar{U} + \zeta)]^{\frac{2}{3}}} = l_1 \left[\frac{\Phi(M)}{Q} \right]^{\frac{1}{3}}.$$

On peut exprimer $\bar{a}_1$ d'une manière différente (ce qui permet une vérification) en introduisant la période P qui est une donnée de l'observation. D'après la relation fondamentale :

$$\frac{(a_1 \sin i)^3}{P^2} = \frac{\mu_2^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$$

on a :

$$l_1^3 = P^2 Q, \quad \text{d'où :} \quad \bar{a}_1^3 = P^2 \Phi(M).$$

Dans ces formules, a_1 et l_1 sont exprimés en unités astronomiques, P en fraction d'année sidérale et les masses avec la masse du Soleil pour unité. Si $a_1 \sin i$ est donné en millions de kilomètres et P en jours solaires moyens (conformément aux Catalogues) on a :

$$\bar{a}_1^3 = 25,0 P^2 \Phi(M),$$

formule commode pour le contrôle ⁽¹¹⁾.

51. Interprétation graphique.

Il est intéressant d'illustrer la solution par un graphique qui permette une vue d'ensemble des résultats : on verra que la discussion d'un système d'inégalités en apparence compliqué se ramène à un problème simple d'intersections.

Portons x en abscisses et les masses en ordonnées, suivant les demi-axes Ox , $O\mu$ (fig. 11).

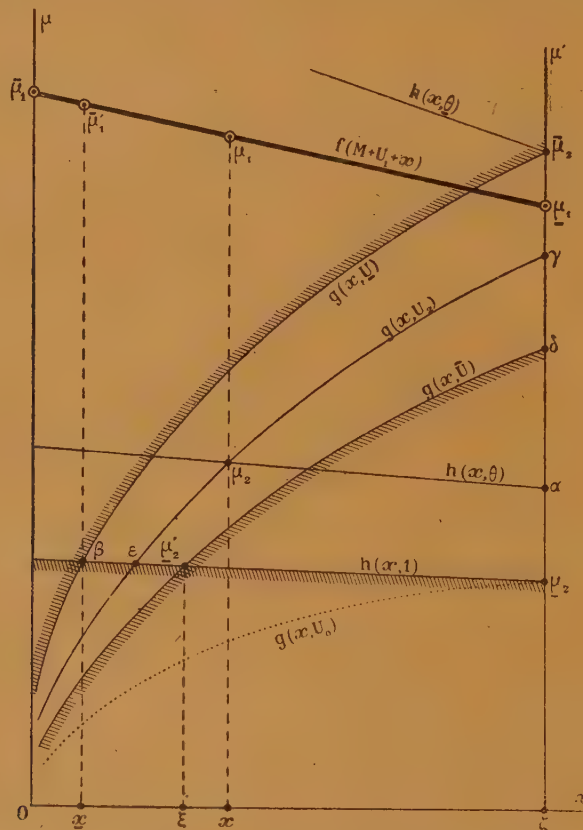


FIG. 11. — Représentation graphique des résultats.

⁽¹¹⁾ Cf. RUSSELL, DUGAN, STEWART, *Astronomy*, t. II, 1927, p. 701.

Soit ζ le point d'abscisse ζ sur Ox : les courbes représentatives des diverses fonctions de x considérées sont tout entières dans la région comprise entre $O\mu$ et l'ordonnée $\zeta\mu'$. Il s'agit de situer par rapport à ces courbes les points (x, μ) figuratifs de la solution.

La masse de la *composante principale* est représentée par tout point μ_1 de l'arc $\overline{\mu_1 \mu_4}$ dessiné en trait de force de la courbe d'EDDINGTON $f(M + U_1 + x)$. Les extrémités de cet arc figurent le maximum et le minimum absolus de la masse μ_1 .

Pour représenter la masse du *compagnon*, nous avons deux familles de courbes: a) les courbes eddingtoniennes $g(x, U_2)$ comprises entre les frontières $g(x, \underline{U})$ et $g(x, \overline{U})$; b) les courbes issues de la fonction des masses, $h(x, \theta)$, qui admettent la seule frontière inférieure $h(x, 1)$. Les hachures qui accompagnent le tracé des trois frontières indiquent la région du plan *extérieure* au domaine des courbes g et h .

Ces courbes présentent l'aspect indiqué par la figure. On observera que les courbes $g(x, U_2)$ partent de O tangentes de $O\mu$ et tournent leur concavité vers Ox , pour aboutir en γ à l'ordonnée $\zeta\mu'$: en particulier, l'extrémité de la frontière supérieure $g(x, \underline{U})$ est le point $\overline{\mu_2}$ figuratif du maximum de μ_2 . Par contre, les courbes $h(x, \theta)$ sont des transversales peu incurvées, de pente négative faible. La frontière inférieure $h(x, 1)$ rencontre $\zeta\mu'$ en μ_2 , qui figure le minimum absolu de μ_2 . Quand le paramètre θ décroît de 1 à 0, les courbes $h(x, \theta)$ s'éloignent de Ox , et leur intersection α avec $\zeta\mu'$ tend vers le point $\overline{\mu_2}$ qui fixe le minimum θ de $\sin^3 i$.

Étudions maintenant les *intersections* de $h(x, 1)$ avec les frontières $g(x, \underline{U})$ et $g(x, \overline{U})$: elles dépendent des positions relatives des points μ_2 et $\overline{\mu_2}$. Conformément au cas général où $G_0 - M - \zeta > \overline{U}$, la figure suppose $\mu_2 < \overline{\mu_2}$. Dans ces conditions, l'extrémité δ de $g(x, \overline{U})$ est au-dessus du point μ_2 , de sorte que $h(x, 1)$ rencontre $g(x, \overline{U})$ et $g(x, \underline{U})$ en μ'_2 et β respectivement. Le point μ'_2 figure donc le minimum effectif de la masse μ_2 , tandis que l'abscisse x de β détermine le minimum effectif $M + x$ de la magnitude M_1 . Il suffit de prolonger l'ordonnée de β jusqu'à son intersection avec la courbe $f(M + U_1 + x)$ pour situer le maximum effectif μ'_1 de la masse μ_1 . Comme la frontière eddingtonienne $g(x, \underline{U})$ a une forme très incurvée, le point β se trouve voisin de l'axe $O\mu$: on voit que x est en général très petit, et les maxima $\overline{\mu'_1}$, $\overline{\mu_1}$, peu différents.

En définitive, tous les points μ_2 d'intersection de deux courbes quelconques $g(x, U_2)$ et $h(x, \theta)$, c'est-à-dire figuratifs d'une solution particulière, sont ceux dont l'ensemble constitue la *surface* délimitée par le quadrilatère curviligne $\mu_2 \beta \mu'_2 \delta$.

Cas particuliers. — Si $\underline{U} < G_0 - M - \zeta \leq \overline{U}$, la frontière inférieure $h(x, 1)$ est tout entière au-dessus de la courbe $g(x, \overline{U})$; le point μ_2 vient se placer entre les points $\overline{\mu_2}$ et δ ou bien est confondu avec δ : tous les points de la surface triangulaire $\overline{\mu_2} \beta \mu_2$ sont solution du problème, et μ_2 représente alors le minimum effectif de la masse μ_2 .

Si $G_0 - M - \zeta \leq \underline{U}$, la courbe $h(x, 1)$ se place au-dessus de $g(x, \underline{U})$: l'application de la relation masse-luminosité aux deux composantes est impossible, sauf quand les points μ_2

et $\overline{\mu_2}$, confondus, représentent l'unique solution $x = y = \zeta$, $U_2 = \overline{U}$, $\theta = 1$.

La quantité $U_0 = G_0 - M - \zeta$ peut se représenter graphiquement par la courbe eddingtonienne $g(x, U_0)$ qui coupe $\zeta \mu'$ en $\underline{\mu_2}$. Tant que U_0 n'a pas de signification physique parce que trop élevé, la courbe $g(x, U_0)$ située entre Ox et la frontière $g(x, \overline{U})$ n'appartient pas à la famille des courbes réelles $g(x, U_2)$ — aussi l'avons-nous dessinée en pointillé. — Quand U_0 diminue, $g(x, U_0)$ se rapproche des courbes $g(x, U_2)$ et la surface du quadrilatère $\underline{\mu_2} \beta \underline{\mu'_2} \delta$ diminue, les points β et $\underline{\mu'_2}$ se déplaçant vers la droite de la figure. *Le domaine de compatibilité entre les données et la relation masse-luminosité décroît donc constamment avec le paramètre U_0 caractéristique de chaque couple.* Quand U_0 devient inférieur à $\overline{U}$, la condition supplémentaire $U_2 \leq U_0$ réduit ce domaine à la surface du triangle $\underline{\mu_2} \beta \underline{\mu_2}$, qui s'amenuise à son tour pour s'évanouir au point $\underline{\mu_2}$ lorsque U_0 atteint son minimum $\overline{U}$.

52. Hypothèse $U_2 = U_1$.

Afin de donner à la solution toute sa généralité, et pour montrer qu'elle n'exige *en soi* aucune hypothèse auxiliaire sur les éléments inconnus, nous avons traité jusqu'ici le terme U_2 comme une variable abstraite, sans nous préoccuper des renseignements apportés par l'observation sur la *fréquence* des différents types spectraux : ce qui revient à envisager sans distinction tous les spectres, de Bo à M7 par exemple, comme ayant la même importance ou une égale probabilité d'être rencontrés dans les applications. On se trouve ainsi conduit à adopter pour le minimum $\overline{U}$ un nombre très bas, dont la forte valeur absolue fournit une masse maxima $\overline{\mu_2}$ trop élevée pour présenter quelque intérêt ⁽¹²⁾. Or, chez les étoiles doubles spectroscopiques, rares sont les types spectraux K et M, pour lesquels $|U|$ est important. Dans ces conditions, plutôt que de considérer les valeurs extrêmes du terme U_2 , il est avantageux de lui substituer une valeur hypothétique : outre que la solution se simplifie, on se maintient au voisinage des valeurs courantes de U *qui sont petites* ; aussi l'erreur introduite par cette approximation est-elle en général négligeable (n° 34).

Pour choisir notre hypothèse, nous nous appuyons sur la remarque suivante, relative aux couples à deux spectres observés : *les spectres des deux composantes sont presque toujours identiques, ou peu différents* ⁽¹³⁾. Quoique l'identité (ou la proximité) des deux spectres soit vraisemblablement moins fréquente chez les couples à un seul spectre visible, nous poserons à défaut de mieux : $U_2 = U_1$.

A peine est-il besoin d'ajouter que cette hypothèse n'équivaut pas à admettre l'identité

⁽¹²⁾ Notamment si l'on trouve $\overline{\mu_2} > \overline{\mu_1}$. Il suffit pour cela qu'on ait $U_1 > \overline{U} + \zeta$, c'est-à-dire $U_1 > -2,07$ (en adoptant $\overline{U} = -2,82$, qui correspond au type spectral M7).

⁽¹³⁾ Cf. G. DURAND, *Annales Obs. Toulouse*, t. XI, 1935, p. 227-235. Sur 67 couples à 2 spectres et parallaxe on en trouve 61 (soit 91 pour cent) à spectres identiques et 4 dont les types spectraux diffèrent à peine de 1 ou 2 sous-classes.

absolue des types spectraux : elle n'exprime que leur *proximité*, compte tenu de l'imprécision et surtout de la petitesse du terme U .

53. Solution du problème, dans l'hypothèse $U_2 = U_1$.

Magnitudes et masses. — Examinons les modifications apportées aux résultats par l'hypothèse $U_2 = U_1$: il suffit de reprendre la solution en remplaçant U_2 , $\bar{U}$ et $\underline{U}$ par U_1 dans toutes les formules.

1° La formule (37) donne :

$$(49) \quad \bar{\mu}_2 = f(M + U_1 + \zeta) = \underline{\mu}_1.$$

Donc : poser $U_2 = U_1$ revient à admettre que la masse du compagnon est au plus égale à celle de la composante principale. Et comme la magnitude visuelle $M + \zeta$ représente à la fois le maximum de M_1 et le minimum de M_2 , il est équivalent de dire que la composante la plus brillante visuellement est aussi la plus massive du couple.

2° La masse eddingtonienne du compagnon ne dépend plus que du seul paramètre x :

$$\mu_2 = g(x, U_1) \equiv f[M + U_1 + y(x)].$$

Mais on ne retiendra que les valeurs de x pour lesquelles $g(x, U_1)$ est $> h(x, 1)$, cette frontière inférieure restant inchangée. La résolution de l'équation :

$$(50) \quad f[M + U_1 + y(x)] = h(x, 1)$$

par approximations successives comme au n° 46, déterminera simultanément les quantités :

$$(51) \quad \begin{aligned} \underline{x} &= \xi, & \bar{y} &= y(\xi), & \bar{M}_2 &= M + \bar{y}, \\ \underline{\mu}'_2 &= f(M + U_1 + \bar{y}). \end{aligned}$$

Au point de vue graphique, la surface triangulaire $\mu_2 O \delta$ (fig. 11) est remplacée par un arc de courbe tel que $O\gamma$, l'extrémité γ de la courbe particulière $g(x, U_1)$ étant confondue avec le point μ_1 d'après (49). L'autre extrémité de l'arc figuratif de la solution est le point ε , d'abscisse $\xi = \underline{x}$, intersection de $g(x, U_1)$ avec la frontière inférieure $h(x, 1)$.

Condition de possibilité. — Puisque $\bar{\mu}_2 = \underline{\mu}_1$, la condition générale $\underline{\mu}_2 \leq \bar{\mu}_2$ devient $\underline{\mu}_2 \leq \underline{\mu}_1$; soit, en mettant en évidence le rapport $\rho = \underline{\mu}_2 / \underline{\mu}_1$:

$$\rho \leq 1.$$

Or, entre $\underline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_2$ et Q existe la relation (36), équivalente à : $Q = \frac{\underline{\mu}_2^3}{(\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2)^2}$.

Introduisons le rapport ρ et posons $q = Q / \underline{\mu}_1$; il vient :

$$(52) \quad q = \frac{\rho^3}{(1 + \rho)^2}.$$

L'inconnue ρ qu'il s'agit de comparer à l'unité est racine de l'équation :

$$(53) \quad F(\rho) \equiv \rho^3 - q(\lambda + \rho)^2 = 0,$$

qui est une transformée de l'équation initiale (32) et admet par conséquent une seule racine réelle positive ρ . De plus :

$$\begin{aligned} F(0) &= -q, & \text{toujours} < 0; \\ F(1) &= 1 - 4q, & \geq 0 \text{ si } q \leq \frac{1}{4}; \\ F(+\infty) & & > 0. \end{aligned}$$

En définitive :

a. Si $q < \frac{1}{4}$, ou $\underline{\mu}_1 > 4Q$, on a $\rho < 1$. La condition est satisfaite (d'autant plus largement d'ailleurs que q est plus petit, puisque q et ρ varient dans le même sens). Elle s'écrit encore, en explicitant les données :

$$Q < \frac{1}{4} f(M + U_1 + \zeta),$$

et l'on reconnaît une forme particulière de la condition de possibilité $Q < \Phi(M)$, déjà rencontrée (n° 43);

b. Si $q = \frac{1}{4}$, ou $\underline{\mu}_1 = 4Q$, on a $\rho = 1$; par suite :

$$\begin{aligned} \underline{x} = \underline{y} &= \zeta, \\ \underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_2 = \overline{\mu}_2 = \underline{\mu}_1 &= f(M + U_1 + \zeta), \\ \theta &= 1, \quad \text{d'où} \quad i = 90^\circ; \end{aligned}$$

c. Si $q > \frac{1}{4}$, ou $\underline{\mu}_1 < 4Q$, on a $\rho > 1$. La condition n'est plus satisfaite, et la relation masse-luminosité ne peut être appliquée aux deux composantes en prenant $U_2 = U_1$. Si l'on désire, malgré tout, obtenir un résultat concret, le mieux est de préciser les valeurs acceptables de U_2 d'après la condition générale $\underline{\mu}_2 \leq \overline{\mu}_2$, c'est-à-dire :

$$\underline{\mu}_2 \leq f(M + U_1 + \zeta),$$

que nous savons équivalente à :

$$U_2 \leq U_0, \quad \text{avec : } U_0 = G_0 - M - \zeta.$$

Il suffit donc de comparer U_0 aux valeurs réelles du terme U pour savoir si le problème est encore possible.

Inclinaison et demi-grand axe. — L'hypothèse $U_2 = U_1$ simplifie les formules obtenues aux nos 49 et 50 pour le minimum de l'inclinaison et le maximum du demi-grand axe. On trouve :

$$\sin i = (4q)^{\frac{1}{3}}, \quad \overline{a}_1 = l_1 (4q)^{-\frac{1}{3}},$$

avec :

$$q = \frac{Q}{\mu_1} = \frac{Q}{f(M + U_1 + \zeta)}.$$

En introduisant la période P, on a encore :

$$\overline{a_1^3} = \frac{1}{4} P^2 \mu_1 = \frac{1}{4} P^2 f(M + U_1 + \zeta).$$

Si P est exprimé en jours solaires moyens, il suffit de remplacer le coefficient

$$\frac{1}{4} \text{ par } \frac{25,0}{4} = 6,25 \text{ pour avoir } \overline{a_1} \text{ en millions de kilomètres.}$$

54. Calcul pratique de μ_2 .

1° Soit à calculer le minimum absolu μ_2 par la formule (36). Il est commode de remplacer les quantités Q et μ_2 respectivement par les nouvelles variables q et ρ définies ci-dessus, ce qui revient à exprimer Q et μ_2 avec μ_1 pour unité, et à résoudre l'équation (53). Posons :

$$a = \frac{2}{27} q^2 + \frac{2}{3} q + 1, \quad b^2 = \frac{4}{27} q + 1,$$

la racine ρ est donnée par la formule :

$$(54) \quad \rho = \frac{q}{3} + \left(\frac{q}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}} \right].$$

et l'on a : $\mu_2 = \rho \mu_1$.

L'avantage de cette transformation est le suivant : la relation (52) étant indépendante des données numériques, s'applique quel que soit le couple envisagé ; et comme la condition $q < 1/4$ se trouve réalisée presque toujours, il est plus expéditif de construire une Table donnant ρ en fonction de q dans l'intervalle réduit $0 < q < 0,25$, $0 < \rho < 1$. Pour cela, la formule (54) n'est même pas nécessaire : on prend ρ comme argument et l'on calcule $\frac{\rho^3}{(1+\rho)^2}$ pour les valeurs successives de ρ ⁽¹⁴⁾.

2° La transformation précédente pourra être utilisée pour calculer toutes les valeurs de μ_2 qui appartiennent à la frontière inférieure $h(x, 1)$, en fonction de $\mu_1 = f(M + U_1 + x)$. On entre dans la Table $\rho = \rho(q)$ avec l'argument $q' = Q/\mu_1$ d'où, par simple lecture, le rapport ρ' tel que $\mu_2 = \rho' \mu_1$. On évite ainsi une résolution trop laborieuse des équations (43), (46) et (50).

3° Enfin, la Table $\rho = \rho(q)$ permettra, dans bien des cas, de calculer rapidement μ_2 en fonction de Q, μ_1 et θ par la formule générale (33), en prenant pour argument $q'' = \frac{Q}{\theta \mu_1}$.

(14). On a une précision suffisante en prenant pour intervalle $\Delta \rho = 0,01$.

Soit $\rho'' = \rho(q'')$; on a $\mu_2 = \rho''\mu_1$. Le calcul direct pourra être évité de cette manière si $q'' < 0,25$ (à moins de prolonger la Table pour $\rho > 1$), ce qui exige que θ ne soit pas trop petit. Par exemple, s'il s'agit de la valeur moyenne $\theta_0 = 4/7$ (n° 29), il faudra $\frac{4Q}{\mu_1} < \theta_0$, c'est-à-dire $\mu_1 > 7Q$.

55. Détail d'un exemple numérique.

Pour montrer comment s'effectue le calcul des différentes inconnues, nous développons dans ce paragraphe un exemple emprunté aux Applications qui terminent ce Chapitre.

Soit l'étoile *5 Ceti* (n° 2 du Tableau). Les données d'observation sont :

$$m = 6,32, \quad Q = 0,133, \quad l_1 = 31,4 \cdot 10^6 \text{ km}, \quad p = 0'',005, \quad \text{type spectral : K2.}$$

Composante principale. — On calcule tout d'abord la magnitude absolue visuelle totale M par la formule (17), à l'aide d'une Table des *modules de distance* $m - M$ en fonction de p .

On a ici $m - M = 6,51$; d'où :

$$\underline{M}_1 = M = -0,19, \quad \overline{M}_1 = \underline{M}_2 = M + 0,75 = +0,56^{(15)}.$$

L'étoile considérée est donc une *géante* et la Table du terme U donne : $U_1 = -0,96$. Par suite :

$$\underline{G}_1 = \underline{M}_1 + U_1 = -1,15, \quad \overline{G}_1 = \overline{M}_1 + U_1 = -0,40.$$

Pour connaître les masses $\overline{\mu}_1$ et $\underline{\mu}_1$, on utilise la Table de la fonction $\lambda(G)$ d'EDDINGTON :

$$\begin{aligned} \log \overline{\mu}_1 &= \lambda(-1,15) = 0,755, & \overline{\mu}_1 &= 5,68; \\ \log \underline{\mu}_1 &= \lambda(-0,40) = 0,633, & \underline{\mu}_1 &= 4,30. \end{aligned}$$

Seconde composante. — Le minimum absolu $\underline{\mu}_2$ de la masse du compagnon s'obtient avec la Table de la fonction $\rho(q)$. On a ici :

$$q = \frac{Q}{\underline{\mu}_1} = 0,03096, \quad \rho = 0,3914, \quad \underline{\mu}_2 = \rho \underline{\mu}_1 = 1,68.$$

Dans cet exemple, conforme au cas habituel, on a $\rho < 1$: il est donc possible d'appliquer la relation masse-luminosité au compagnon en posant $U_2 = U_1$; dans ces conditions :

$$\overline{\mu}_2 = \underline{\mu}_1 = 4,30.$$

Il faut maintenant calculer $\underline{\mu}'_2$ (minimum effectif) et $\overline{M}_2$, c'est-à-dire résoudre l'équation (50). En partant de $\xi_1 = 0$, deux approximations suffisent :

(15). Les nombres en caractères gras représentent les résultats à retenir (ou définitifs) qui figurent dans le Tableau des Applications.

1^{re} approximation :

$$q_1 = \frac{Q}{f(M + U_1 + \xi_1)} = \frac{Q}{\mu_1} = 0,0233,$$

$$\rho_1 = \rho(q_1) = 0,349, \quad h_1 = \rho_1 \bar{\mu}_1 = 1,99,$$

$$M + U_1 + y_1 = G(h_1) = +1,98, \quad y_1 = 3,13 = y(\xi_2);$$

2^e approximation :

$$\xi_2 = 0,06, \quad f(M + U_1 + \xi_2) = 5,55,$$

$$q_2 = \frac{Q}{f(M + U_1 + \xi_2)} = 0,0240, \quad \rho_2 = 0,353, \quad h_2 = \rho_2 f(M + U_1 + \xi_2) = 1,96,$$

$$M + U_1 + y_2 = G(h_2) = +2,04, \quad y_2 = 3,19 = y(\xi_3),$$

ce qui redonne la valeur précédente : $\xi_3 = \xi_2 = 0,06$. On prendra finalement :

$$\underline{x} = \underline{\xi} = 0,06, \quad \bar{y} = y(\underline{\xi}) = 3,17, \quad \bar{M}_2 = M + \bar{y} = +2,98,$$

$$\underline{\mu}'_2 = f(M + U_1 + \bar{y}) = 4,97.$$

Comme résultat secondaire, indiquons le maximum effectif de la masse μ_1 :

$$\bar{\mu}'_1 = f(M + U_1 + \underline{x}) = 5,55,$$

qui est à peine inférieur à $\bar{\mu}_1$, à cause de la petitesse de $\underline{x}$ (cas général).

Inclinaison et demi-grand axe. — Avec $U_2 = U_1$, le minimum $\underline{i}$ de l'inclinaison se déduit immédiatement du rapport $q = 0,03096$ qui a servi à évaluer $\underline{\mu}_2$. On a :

$$\sin^3 \underline{i} = 4q = 0,124, \quad \underline{i} = 29^\circ,9, \quad \bar{a}_1 = l_1 \operatorname{cosec} \underline{i} = 63,0.10^6 \text{ km}^{(16)}.$$

§ 2. — Précision des résultats.

56. Il est clair que les formules établies au § 1 ne peuvent fournir que des *valeurs approchées* des inconnues : non seulement parce que les données sont en nombre insuffisant, mais aussi du fait que ces données sont affectées par les erreurs d'observation. Nous distinguerons donc :

1^o Une « erreur » liée à la nature même du problème ; plus exactement, la part

(16). Le lecteur vérifiera que, sans hypothèse sur U_1 , le minimum $\underline{U} = -2,82$ donne $\bar{\mu}_2 = 9,02$, valeur nettement $> \bar{\mu}_1$, donc peu vraisemblable. On aurait obtenu d'autre part, en résolvant les équations (43) et (46) :

$$\underline{x} = 0,01, \quad \bar{y} = 5,01, \quad \bar{M}_2 = +4,82; \quad \underline{\xi} = 0,18, \quad y(\underline{\xi}) = 2,02, \quad \underline{\mu}'_2 = 1,90,$$

de sorte que, à l'opposé des maxima $\bar{M}_1$ et $\bar{\mu}_2$, le minimum $\underline{\mu}'_2$ est peu modifié par l'hypothèse $U_2 = U_1$.

Enfin, on aurait calculé $\underline{i}$ et $\bar{a}_1$ par les formules générales des n^{os} 49 et 50 :

$$\Phi = \frac{\bar{\mu}_2^3}{(\mu_1 + \mu_2)^2} = 4,15, \quad \frac{Q}{\Phi} = \sin^3 \underline{i} = 0,032, \quad \underline{i} = 18^\circ,5, \quad \bar{a}_1 = 98,8.10^6 \text{ km}.$$

d'indétermination que la solution laisse subsister sur chaque inconnue, dont on connaît les seules valeurs maxima et minima: cette indétermination s'exprime par la différence « borne supérieure moins borne inférieure » ou *intervalle d'incertitude* (par exemple $\overline{\mu_1} - \underline{\mu_1}$, etc.) Si l'on adopte comme valeur approchée d'une inconnue la moyenne des deux bornes, ou une valeur probable (en posant par exemple $x = \zeta/2$, $\sin^3 i = 4/7, \dots$) on a toujours la possibilité, d'après l'intervalle d'incertitude, de déterminer rigoureusement la *limite supérieure* de l'indétermination;

2° Les erreurs proprement dites, provenant de données inexactes. Parmi ces erreurs, certaines sont assez mal connues, mais demeurent *faibles*, sans répercussion notable sur les résultats: telles les erreurs sur la magnitude visuelle apparente et sur le terme U. En revanche, l'erreur sur la parallaxe est parfois importante, mais on peut en apprécier l'effet quand sa valeur probable est fournie par les Catalogues (parallaxes trigonométriques). Enfin, il y a lieu de tenir compte de l'erreur sur la relation d'EDDINGTON, erreur que nous savons n'être pas plus importante que celles des meilleures observations (RUSSELL) et dont nous pouvons préciser l'ordre de grandeur (G. DURAND).

57. Composante principale. Précision de la magnitude M_1 .

1° *Intervalle d'incertitude*. — Il est défini par la différence $\overline{M_1} - \underline{M_1}$, égale à ζ ou à $\zeta - x$ suivant qu'on laisse de côté ou non le minimum effectif x . Comme x est en général petit devant ζ , il est préférable de s'en tenir aux bornes $x=0$ et $\overline{x}=\zeta$, afin d'évaluer la masse de la composante principale sans faire jouer l'application de la relation masse-luminosité au compagnon. Dans ces conditions, l'intervalle d'incertitude sur M_1 , égal à 0,75 magn., est indépendant des erreurs d'observation.

2° *Magnitude visuelle approchée*. — On peut définir M_1 autrement que par ses bornes, en se donnant une valeur approchée commode pour évaluer au mieux la masse μ_1 . Il est tout indiqué d'adopter la moyenne entre les bornes, soit:

$$M_1 = M + (\zeta/2) = M + 0,38,$$

qui offre l'avantage de rendre minima la limite supérieure de l'erreur, au plus égale à $\zeta/2$.

58. Précision de la masse μ_1 . Erreur théorique pour $x = \zeta/2$.

Nous avons déjà donné (n° 41) les valeurs de l'intervalle d'incertitude relatif $\frac{\overline{\mu_1} - \underline{\mu_1}}{\mu_1 + \underline{\mu_1}}$, qui mesure la limite supérieure de l'erreur relative sur μ_1 quand on prend la moyenne $(\overline{\mu_1} + \underline{\mu_1})/2$

Montrons qu'il est équivalent, dans la pratique, d'adopter cette moyenne ou de calculer μ_1 directement avec $x = \zeta/2$. En toute rigueur, la masse $(\overline{\mu_1} + \underline{\mu_1})/2$ ne correspond pas à $M + (\zeta/2)$, car la relation masse-luminosité n'est pas strictement linéaire; mais un intervalle de 0,75 magn. est assez réduit pour rendre l'écart insignifiant, comme on peut s'en assurer par le tableau ci-après, qui complète celui du n° 41.

$M+U_1$		-4	-2	0	+2	+4	+8	+12
$\mu_1 \left\{ \begin{array}{l} f[M+U_1+(\zeta/2)] \dots \dots \dots \\ \overline{(\mu_1+\mu_1)/2} \dots \dots \dots \end{array} \right.$		17,0	6,88	3,27	1,79	1,07	0,436	0,186
		17,4	6,97	3,31	1,80	1,08	0,437	0,187
$\frac{\Delta\mu_1}{\mu_1} \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = +(\zeta/2) \dots \dots \dots \\ \Delta x = -(\zeta/2) \dots \dots \dots \end{array} \right.$		-0,16	-0,14	-0,12	-0,09	-0,086	-0,078	-0,077
		+0,21	+0,17	+0,13	+0,11	+0,094	+0,084	+0,081

Les deux dernières lignes du tableau font connaître la limite supérieure de l'erreur relative, par excès et par défaut, sur la masse approchée $f[M+U_1+(\zeta/2)]$, limite calculée de la manière suivante :

1° *Formule générale.* — La fonction d'EDDINGTON étant prise sous la forme $\lambda(G)$, on a pour un accroissement ΔG ⁽¹⁶⁾ quelconque :

$$\log \mu = \lambda(G), \quad \log(\mu + \Delta\mu) = \lambda(G + \Delta G),$$

d'où :

$$(55) \quad \frac{\Delta\mu}{\mu} = 10^{\Delta\lambda} - 1, \quad \text{avec :} \quad \Delta\lambda = \lambda(G + \Delta G) - \lambda(G).$$

2° Nous avons ici :

$$G = G_1 = M + U_1 + (\zeta/2), \quad \Delta G_1 = \Delta x = \pm(\zeta/2),$$

donc :

$$\Delta\lambda_1 = \lambda[G_1 \pm (\zeta/2)] - \lambda(G_1) = \begin{cases} \lambda(M + U_1 + \zeta) - \lambda[M + U_1 + (\zeta/2)] & (\Delta x > 0). \\ \lambda(M + U_1) - \lambda[M + U_1 + (\zeta/2)] & (\Delta x < 0). \end{cases}$$

On en déduit, pour les valeurs entières successives de G_1 , les valeurs correspondantes de $\Delta\lambda_1$, puis de $\Delta\mu_1/\mu_1$ par (55). On remarquera qu'il faut distinguer entre les valeurs positives et négatives de Δx , l'erreur $\Delta\mu_1/\mu_1$ ne prenant pas la même valeur absolue pour des valeurs opposées de Δx .

59. Influence des erreurs d'observation.

Les erreurs provenant des données d'observation s'ajoutent à l'incertitude sur x . Rappelons la formule qui exprime l'erreur relative sur la masse en fonction des erreurs sur les données ⁽¹⁷⁾; nous chercherons ensuite à apprécier chacune de celles-ci.

Les données sont : m , U_1 , p et la valeur approchée x_0 choisie pour x , p. ex., $x_0 = \zeta/2$. On a donc les erreurs Δm , ΔU_1 , Δp et $x - x_0$. Avec :

$$G_1 = M_1 + U_1 \quad \text{et} \quad M_1 = M + x_0 = m + 5 + 5 \log p + x_0,$$

on a les équations aux valeurs approchées et aux valeurs exactes :

$$(56) \quad \begin{aligned} G_1 &= m + U_1 + 5 + 5 \log p + x_0, \\ G_1 + \Delta G_1 &= m + \Delta m + U_1 + \Delta U_1 + 5 + 5 \log(p + \Delta p) + x, \end{aligned}$$

⁽¹⁶⁾ Selon la définition habituelle, le symbole Δ désigne la différence : « valeur exacte moins valeur approchée ».

⁽¹⁷⁾ Cf. G. DURAND, *Annales Obs. Toulouse*, t. XIV, 1938, p. 31.

d'où par soustraction :

$$(57) \quad \Delta G_1 = \Delta m + \Delta U_1 + 5 \log [1 + (\Delta p/p)] + x - x_0.$$

Utilisons la forme *linéarisée* de la relation d'EDDINGTON (n° 33) :

$$\lambda(G) = \alpha(G) \cdot G + \lambda_0.$$

On a, d'une manière générale :

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \alpha(G + \Delta G) - \alpha(G), \\ \Delta \lambda &= \alpha(G + \Delta G) \cdot (G + \Delta G) - \alpha(G) \cdot G = G \Delta \alpha + (\alpha + \Delta \alpha) \Delta G, \end{aligned}$$

d'où, remplaçant G et ΔG par les expressions (56) et (57) de G_1 et ΔG_1 :

$$\Delta \lambda_1 = G_1 \Delta \alpha + (\alpha + \Delta \alpha) \{ \Delta m + \Delta U_1 + 5 \log [1 + (\Delta p/p)] + x - x_0 \}.$$

Posons pour abréger :

$$\begin{aligned} \Delta g_1 &= \Delta m + \Delta U_1 + x - x_0, \\ \log u &= G_1 \Delta \alpha, & \log v &= (\alpha + \Delta \alpha) \Delta g_1. \end{aligned}$$

il vient, d'après (55) :

$$(58) \quad \Delta \mu_1 / \mu_1 = uv [1 + (\Delta p/p)]^{5(\alpha + \Delta \alpha)} - 1.$$

Application aux masses maxima et minima. — Le terme x n'intervenant que par ses bornes, o et ζ , dans la détermination de $\overline{\mu_1}$ et $\underline{\mu_1}$, seules les erreurs d'observation affectent ces deux quantités : le calcul des erreurs $\Delta \mu_1 / \mu_1$ et $\Delta \overline{\mu_1} / \overline{\mu_1}$ est un cas particulier du précédent.

Soient $\underline{G_1}$ et $\overline{G_1}$ les bornes inférieure et supérieure de G_1 :

$$\underline{G_1} = M + U_1 = m + U_1 + 5 + 5 \log p, \quad \overline{G_1} = \underline{G_1} + \zeta;$$

on a d'abord l'identité des erreurs $\Delta \underline{G_1}$ et $\Delta \overline{G_1}$:

$$\Delta \underline{G_1} = \Delta \overline{G_1} = \Delta m + \Delta U_1 + 5 \log [1 + (\Delta p/p)],$$

et comme la fonction $\alpha(G)$ ne varie guère dans un intervalle d'amplitude ζ , on peut confondre sans erreur appréciable les valeurs de α et $\Delta \alpha$ qui correspondent aux arguments $\underline{G_1}$ et $\overline{G_1}$, et aux accroissements respectifs $\Delta \underline{G_1}$ et $\Delta \overline{G_1}$. D'autre part, il est légitime de confondre $\underline{G_1} \Delta \alpha$ avec $\overline{G_1} \Delta \alpha$, le produit $G \Delta \alpha$ ayant cette particularité de demeurer à peu près constant quand G varie, pour une valeur déterminée de ΔG . Pour appliquer la formule (58) aux bornes $\underline{\mu_1}$ et $\overline{\mu_1}$ il suffit donc d'éliminer le terme $x - x_0$ contenu dans Δg_1 . Posant :

$$\delta g_1 = \Delta m + \Delta U_1, \quad \log v_0 = (\alpha + \Delta \alpha) \delta g_1,$$

on a :

$$\Delta \overline{\mu_1} / \overline{\mu_1} = \Delta \underline{\mu_1} / \underline{\mu_1} = uv_0 [1 + (\Delta p/p)]^{5(\alpha + \Delta \alpha)} - 1.$$

Les erreurs relatives sur les masses maxima et minima sont égales : par suite, les erreurs d'observation n'altèrent pas le rapport d'incertitude $\frac{\overline{\mu_1} - \underline{\mu_1}}{\overline{\mu_1} + \underline{\mu_1}}$ sur la masse de la composante principale.

Erreurs provenant de la magnitude apparente et du terme U_1 . — Nous ne dirons que quelques mots des erreurs Δm et ΔU_1 . D'abord, l'erreur Δm sur la magnitude apparente

visuelle totale m est presque toujours négligeable devant les autres termes de (57). Quant à l'erreur ΔU_1 , difficile à apprécier lorsqu'elle provient d'un spectre mal déterminé, nous savons qu'elle est en général négligeable (n° 34). Dans le cas où ΔU_1 traduit une différence entre les types spectraux attribués à la composante principale, on aura une idée de ΔU_1 d'après la Table du terme U. Enfin, la Table de $\lambda(G)$ donnera $\Delta \lambda_1$ en fonction de $\Delta G = \Delta U_1$ suivant l'argument $G = M + U_1$, d'où $\Delta \mu_1 / \mu_1$ par (55).

Erreur provenant de la parallaxe. — L'erreur Δp affecte d'une manière à peu près exclusive la magnitude absolue visuelle totale M . Nous désignerons donc par ΔM l'erreur partielle sur G_1 , troisième terme de l'expression générale (57) de ΔG_1 , soit :

$$(59) \quad \Delta M = 5 \log [1 + (\Delta p/p)].$$

Pour évaluer ΔM , on peut adopter comme Δp l'erreur probable, quand elle est donnée dans les Catalogues : tel est le cas des parallaxes trigonométriques. L'erreur ΔM peut se mettre en Table, avec $\Delta p/p$ comme argument. De même qu'au n° 58 à propos de l'erreur Δx , il faut considérer séparément les valeurs opposées de Δp : quand $\Delta p/p$ est important, l'erreur ΔM , dont le signe est celui de Δp , est plus grande en valeur absolue pour une valeur négative de Δp que pour la valeur opposée.

Vu le rôle prépondérant de l'erreur Δp , nous avons calculé $\Delta \mu_1 / \mu_1$ pour quelques valeurs de $\Delta p/p$, suivant qu'on a affaire à une parallaxe bonne ($\Delta p/p = 10$ p. cent) ou médiocre ($\Delta p/p = 50$ et 100 p. cent). Les erreurs $\Delta \mu_1 / \mu_1$ figurent (en pour cent) dans le tableau ci-dessous :

G =	-4		0		+4		+8	
Signe de Δp	+	-	+	-	+	-	+	-
$\left \frac{\Delta p}{p} \right = 10$ p. cent	-10	+ 13	- 7	+ 9	- 5	+ 6	- 4	+ 5
50 »	-35	+ 123	-25	+ 77	-19	+ 48	-17	+ 39
100 »	-51	+ ∞	-38	+ ∞	-30	+ ∞	-28	+ ∞

60. Expression du terme $x - x_0$ en erreur sur la parallaxe.

Quoique intrinsèque à la solution du problème, l'erreur $x - x_0$ peut être assimilée, dans la formule (58), à une erreur d'observation supplémentaire sur la magnitude absolue visuelle M . Il est intéressant de transformer $x - x_0$ (dont nous connaissons la limite supérieure) en une *erreur fictive équivalente* δp sur la parallaxe, ce qui permet une comparaison plus frappante avec l'erreur propre Δp . Nous poserons donc, par analogie avec (59) :

$$x - x_0 = \delta M = 5 \log [1 + (\delta p/p)].$$

Si l'on adopte, conformément aux conclusions du n° 57, $x_0 = \zeta/2$, l'erreur sur x est au plus égale, en valeur absolue, à $\zeta/2 = 0,377$. Elle équivaut pour la parallaxe à une

erreur relative maxima :

$$\delta p, p=10 \frac{x-x_0}{5} - 1 = \begin{cases} +0,19 & (x-x_0 > 0) \\ -0,16 & (x-x_0 < 0), \end{cases} \text{ ou } -1$$

soit, en moyenne, 17,5 p. cent. Indépendante du couple considéré, cette erreur est inférieure à l'erreur $\Delta p/p$ dont sont affectées la plupart des parallaxes trigonométriques faibles des étoiles doubles spectroscopiques à un seul spectre visible.

61. Aux erreurs ci-dessus s'ajoute, quand on passe de G_1 à μ_1 , une erreur due à la relation d'EDDINGTON. Pour en tenir compte, on utilise l'erreur probable affectant la relation : sa valeur est 0,24 magnitude⁽¹⁸⁾; elle équivaut à une erreur relative de 11 p. cent sur la parallaxe.

62. Précision des éléments μ_2, i et a_1 .

Le problème de l'évaluation des erreurs sur μ_2, i et a_1 ne saurait être traité, si l'on vise à des conclusions pratiques, suivant les mêmes modalités que pour la composante principale, où l'on parvenait à exprimer les erreurs avec des formules simples, dans lesquelles il suffisait de substituer les valeurs numériques. Cet avantage disparaît maintenant, à cause surtout de la complexité de la formule qui détermine μ_2 en fonction de Q, μ_1 et θ (n° 42). De plus, des différences essentielles distinguent, quant à la précision des résultats, la composante principale des autres éléments de la solution. Ce sont :

1° L'importance plus grande de l'indétermination due au nombre insuffisant des données, comparativement aux erreurs dues à leur inexactitude : par exemple, l'intervalle d'incertitude est plus élevé, en moyenne, sur μ_2 que sur μ_1 ;

2° La variabilité de l'intervalle d'incertitude d'un couple à un autre et, pour un même couple, suivant les parallaxes utilisées. En effet, la différence $\overline{\mu_2} - \underline{\mu_2}$ dépend des caractères propres à chaque couple et des erreurs sur les données, qui affectent inégalement les 2 bornes, issues de formules différentes. Dès lors, chaque couple constitue un *cas d'espèce*, et l'intervalle d'incertitude ne nous renseigne que d'une manière très imparfaite sur la précision : par exemple, une parallaxe fortement erronée peut entraîner un rapprochement des deux bornes $\overline{\mu_2}$ et $\underline{\mu_2}$, accroître i et diminuer a_1 , bref, donner l'apparence d'une solution précise, et inversement.

Pour ces différents motifs, il ne faut pas s'attendre à des résultats aussi nets qu'avec la composante principale. Seule, une étude *statistique* des intervalles d'incertitude constatés, portant sur un nombre de couples assez grand pour réaliser une compensation approximative des erreurs provenant des données, nous apportera quelque renseignement sur la précision de la méthode. Et si, pour un couple particulier, on désirait connaître l'influence

⁽¹⁸⁾ G. DURAND, *Annales Obs. Toulouse*, t. XV, 1939, p. 146.

des erreurs d'observation sur les bornes $\overline{\mu_2}$, $\underline{\mu'_2}$, i et $\overline{a_1}$, le mieux serait de les calculer à nouveau avec les données corrigées⁽¹⁹⁾.

Précision de la masse du compagnon. — Comme pour μ_1 , nous devons considérer l'intervalle relatif $\delta\mu_2/\mu_2$, défini par :

$$\mu_2 = (\overline{\mu_2} + \underline{\mu'_2})/2, \quad \delta\mu_2 = (\overline{\mu_2} - \underline{\mu'_2})/2, \quad \text{d'où :} \quad \frac{\delta\mu_2}{\mu_2} = \frac{\overline{\mu_2} - \underline{\mu'_2}}{\overline{\mu_2} + \underline{\mu'_2}},$$

avec, dans l'hypothèse $U_2 = U_1$ (n° 53) :

$$\overline{\mu_2} = \underline{\mu_1} = f(M + U_1 + \zeta), \quad \underline{\mu'_2} = f(M + U_1 + \eta).$$

Le rapport $\delta\mu_2/\mu_2$ représente la limite supérieure de l'erreur relative sur μ_2 quand on adopte la moyenne entre les bornes. Nous en avons effectué le calcul pour les 161 couples qui font l'objet des applications numériques ci-après, en distinguant les valeurs différentes de ce rapport, obtenues pour un même couple lorsque plusieurs parallaxes ont été utilisées. Au total, nous disposons de $N = 233$ valeurs individuelles, dont la répartition statistique est la suivante :

$\delta\mu_2/\mu_2 =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$n =$	5	21	29	30	41	39	23	19	18	8	
$n/N =$	0,02	0,09	0,12	0,13	0,18	0,17	0,10	0,08	0,08	0,03	

Les fréquences passent par un maximum vers le milieu de l'intervalle total, mais la dispersion est assez forte : la moyenne des $\delta\mu_2/\mu_2$ vaut 0,48, et 57 p. cent des couples sont tels que $0,3 < \delta\mu_2/\mu_2 < 0,7$. C'est dire que les bornes $\underline{\mu_2}$ et $\underline{\mu'_2}$ déterminent la masse du compagnon avec une précision de l'ordre de 50 p. cent en moyenne, mais très inégale d'un couple à un autre.

Remarque. — Comparée à l'incertitude sur μ_1 , qui dépasse rarement 15 p. cent, l'incertitude moyenne sur μ_2 paraît grande au premier abord. On doit néanmoins considérer que la relation masse-luminosité apporte ici encore un résultat intéressant, si l'on tient compte du peu que fournissent les données. Rappelons aussi que le minimum $\underline{\mu'_2}$ a été calculé en posant $\sin^3 i = 1$, alors que l'inclinaison ne saurait atteindre 90° chez les couples non photométriques. Du point de vue statistique, il eût donc été préférable d'utiliser la moyenne $J = 76^\circ,7$ des inclinaisons maxima déduites de la condition de non-éclipse (n° 20) ; mais la précision eût été augmentée aux dépens des valeurs individuelles de $\underline{\mu'_2}$, qui eussent perdu toute rigueur.

Inclinaison et demi-grand axe. — Le minimum i nous renseigne peu sur l'inclinaison, sauf quelques cas particuliers où i est voisin de 90° . Pour avoir une idée de l'incertitude

⁽¹⁹⁾ Il y aura lieu notamment de vérifier l'exactitude des données (en particulier la parallaxe) quand on se trouvera devant un cas d'impossibilité ($\overline{\mu_2} < \underline{\mu_2}$) ou au voisinage du cas limite ($\overline{\mu_2} = \underline{\mu_2}$, $i = 90^\circ$.)

moyenne on peut considérer, soit les valeurs de l'intervalle $90^\circ - i$, soit les inclinaisons minima elles-mêmes, dont la répartition statistique est la suivante :

$i =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$n =$	31	46	76	39	21	14	5	1	0	
$n/N =$	0,13	0,20	0,33	0,17	0,09	0,06	0,02	0,00	0,00	

On voit que les minima i sont en général *faibles* : la moyenne atteint à peine $26^\circ,7$ et leur accumulation dans l'intervalle $(0^\circ, 40^\circ)$ est nettement caractérisée (82 p. cent). Si l'on adopte comme inclinaison « probable » la valeur

$$(60) \quad i_0 = 45^\circ + (i/2),$$

équidistante des bornes i et 90° , on peut estimer à $\pm 32^\circ$ en moyenne l'incertitude que la solution laisse subsister sur l'inclinaison.

Pour terminer, considérons le demi-grand axe a_1 , dont les bornes sont $\bar{a}_1 = l_1/\sin i$ et $\underline{a}_1 = l_1$. De même que pour une masse, il faut envisager l'intervalle d'incertitude

relatif $\frac{\bar{a}_1 - \underline{a}_1}{\bar{a}_1 + \underline{a}_1}$, égal à la limite supérieure $\delta a_1 / a_1$ de l'erreur relative quand on prend pour

a_1 la moyenne entre $\bar{a}_1$ et $\underline{a}_1$, c'est-à-dire :

$$a_1 = \frac{1}{2}(\bar{a}_1 + \underline{a}_1) = \frac{l_1}{2} \frac{1 + \sin i}{\sin i}, \quad \delta a_1 = \frac{1}{2}(\bar{a}_1 - \underline{a}_1) = \frac{l_1}{2} \frac{1 - \sin i}{\sin i},$$

d'où :

$$\frac{\delta a_1}{a_1} = \frac{1 - \sin i}{1 + \sin i} = \operatorname{tg}^2 \delta i,$$

δi désignant l'écart entre l'inclinaison i_0 et chacune des bornes i et 90° . Nous avons calculé $\operatorname{tg}^2 \delta i$ pour les 233 valeurs individuelles : en moyenne, $\operatorname{tg}^2 \delta i = 0,42$, tandis que l'écart moyen $\delta i = 32^\circ$ donne 0,39. La solution détermine le demi-grand axe avec une précision moyenne de l'ordre de 40 p. cent.

63. Accord avec les résultats du Chapitre I.

Il est à remarquer que la moyenne des inclinaisons i_0 définies par (60), égale à 58° , coïncide pratiquement avec la moyenne $i = 56^\circ$ obtenue par diverses méthodes au Chapitre I (cf., par exemple, n° 26). Cet accord met en évidence la valeur statistique des inclinaisons i_0 , malgré leur faible précision individuelle : constatation favorable à la réalité du minimum i de l'inclinaison et, par conséquent, de l'ensemble des résultats obtenus dans le présent Chapitre avec la relation masse-luminosité.

§ 3. — Applications numériques.

64. Nous avons appliqué la méthode à 161 étoiles doubles spectroscopiques dont on connaît une orbite avec la fonction des masses, et une parallaxe *observée*. Les orbites ont été choisies dans le *Fourth Catalogue of spectroscopic binary stars* de J. H. MOORE (*Lick Observatory Bulletin*, vol. XVIII, 1936, n° 483, p. 5). Pour les parallaxes, nous nous sommes servi du *General Catalogue of stellar parallaxes* de F. SCHLESINGER (Yale, 1935) qui contient des valeurs trigonométriques et spectroscopiques : lorsque plusieurs parallaxes d'un même couple ont été publiées, nous avons effectué un calcul séparé pour chacune d'elles.

Les résultats numériques font l'objet du Tableau ci-après. On y trouvera, dans les deux premières colonnes : un numéro d'ordre, puis le *nom* de l'étoile, au-dessous duquel figure sa *position* pour 1900,0. Les colonnes suivantes rappellent les données de l'observation et font connaître les résultats tirés de l'application de la relation masse-luminosité. Pour chaque étoile, la première ligne indique successivement : l'*auteur* de l'orbite, la *magnitude apparente* visuelle totale m et le *type spectral* de la composante principale, la *fonction des*

masses $\frac{\mu_2^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$, enfin le *semi-grand axe minimum* $a_1 \sin i$. La ou les lignes au-dessous contiennent chacune : la *parallaxe*, trigonométrique (accompagnée de l'indication de l'erreur probable) ou spectroscopique, les *magnitudes absolues visuelles minima et maxima* des composantes, les *masses maxima et minima* correspondantes, enfin l'*inclinaison minima* et le *semi-grand axe maximum* de l'orbite absolue de la composante principale.

Les résultats relatifs à la composante principale ont été rendus indépendants des autres éléments de la solution en prenant $\underline{M}_1 = M$ au lieu de $M + x$ (n° 57). On a posé $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$, d'où $\underline{M}_2 = \underline{M}_1$ et $\underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_1$. La masse maxima désignée par $\underline{\mu}_2$ dans la légende est la masse $\underline{\mu}'_2$ calculée par la formule (51). Les masses sont exprimées avec la masse du Soleil pour unité, les demi-grands axes en *milliers* de kilomètres et les parallaxes en *millièmes* de seconde d'arc. Certains couples, indiqués par la lettre R, constituent des cas particuliers : ils sont l'objet des *Remarques* qui font suite au Tableau. Parfois, les résultats figurent entre parenthèses : il s'agit de valeurs douteuses ou extrapolées.

N°	Etoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a, \sin i$	
			M_1	$M_1 = M_2$	M_2	μ_1	$\mu_1 = \mu_2$	μ_2	i	a
1	33 Psc	Harper	4,68; K0					0,030		15 856
	0 ^h 0 ^m ,2	11±10	—0,11	+0,64	+ 5,32	4,97	3,78	1,01	18°,3	50 501
	—6°16'	23	+1,49	+2,24	+ 6,76	2,85	2,27	0,723	22°,0	42 320
2	5 Cet	Christie	6,32; K2					0,133		31 400
	0 ^h 3 ^m ,1	5	—0,19	+0,56	+ 2,98	5,68	4,30	1,97	29°,9	63 000
3	α And	Baker	2,15; A1n					0,180		34 790
	0 ^h 3 ^m ,2	24±5	—0,95	—0,20	+ 1,73	4,79	3,65	1,99	35°,6	59 769
	+28°32'	45	+0,42	+1,17	+ 2,75	2,97	2,36	1,51	42°,3	51 699
4	α Phe	Lunt	2,44; G5					0,066		290 000
	0 ^h 21 ^m ,3	28±10	—0,32	+0,43	+ 3,84	4,77	3,64	1,34	24°,5	699 190
	—42°51'	51	+0,98	+1,73	+ 4,97	3,03	2,40	1,02	28°,6	605 810
5	Boss 82	Udick	5,16; A2					0,0288		2 240
	0 ^h 22 ^m ,8	16	+1,18	+1,93	+ 6,39	2,33	1,88	0,633	23°,2	5 685
6	13 Cet A	Luyten	5,6; F7					0,0108		106 000
	0 ^h 30 ^m ,1	52±8	R +4,18	+4,93	+10,5	1,09	0,912	0,271	21°,2	293 090
	—4°9'	48	+4,01	+4,76	+10,3	1,14	0,948	0,279	21°,0	295 740
7	π And	Jordan	4,44; B3					0,8892		77 200
	0 ^h 31 ^m ,5	9	—0,79	—0,04	+ 0,16	5,85	4,41	4,09	68°,6	82 913
8	23 Cas	Young	5,39; B9s					0,0121		7 020
	0 ^h 41 ^m ,1	8	—0,09	+0,66	+ 6,75	3,63	2,83	0,599	15°,0	27 125
9	ζ Psc B	Christie	6,49; F6					0,124		6 340
	1 ^h 8 ^m ,5	22±9	+3,20	+3,95	+ 5,30	1,37	1,14	0,828	49°,3	8 362
	+7°3'	24	+3,39	+4,14	+ 5,81	1,31	1,09	0,806	50°,3	8 242
10	γ Phe	Wilson	3,40; M1					0,079		42 100
	1 ^h 24 ^m ,0	18	—0,32	+0,43	+ 3,70	8,91	6,50	2,11	21°,4	115 396
11	ζ Cet	S. Jones	3,92; K0					0,0033		60 750
	1 ^h 46 ^m ,5	43±8	+2,09	+2,84	+11,1	2,37	1,91	0,284	11°,0	318 391
	—10°50'	14	—0,35	+0,40	+ 8,53	5,44	4,13	0,489	8°,5	410 974
12	α Tri	Harper	3,58; F2					0,0003		287
	1 ^h 47 ^m ,4	51±8	+2,12	+2,87	(+15,0)	1,79	1,46	0,102	5°,4	3 050
	+29°6'	48	+1,99	+2,74	(+14,8)	1,86	1,51	0,106	5°,4	3 050
13	ω Cas	Young	5,03; B8s					0,164		27 190
	1 ^h 48 ^m ,2	8	—0,45	+0,30	+ 2,32	4,22	3,25	1,77	35°,9	46 359
14	β Ari	Ludendorff	2,72; A3					0,042		22 880
	1 ^h 49 ^m ,1	63±6	+1,72	+2,47	+ 6,17	1,97	1,61	0,661	28°,0	48 734
	+20°19'	68	+1,88	+2,63	+ 6,29	1,89	1,54	0,645	28°,5	47 956
15	β Tri	Struve, Pogo	3,08; A6					0,0397		9 930
	2 ^h 3 ^m ,6	13±6	—1,35	—0,60	+ 3,61	5,42	4,11	1,19	19°,8	29 313
	+34°31'	45	+1,35	+2,10	+ 5,97	2,19	1,77	0,689	26°,6	22 174
16	δ Tri	Pearce	5,07; G0					0,0007		1 200
	2 ^h 10 ^m ,9	98±6	+5,03	+5,78	(+15,9)	0,920	0,774	0,0892	8°,8	7 844
	+33°46'	68	+4,23	+4,98	(+15,3)	1,11	0,931	0,101	8°,3	8 312
17	Boss 523	Harper	5,82; F8					0,051		22 371
	2 ^h 12 ^m ,8	33±6	+3,41	+4,16	+ 7,08	1,33	1,10	0,564	34°,7	39 306
	+1°17'	42	+3,94	+4,69	+ 7,45	1,16	0,971	0,521	36°,5	37 606

N°	Étoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu_1^2 \sin^2 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a, \sin i$	
			M_1	$M_1 = M_2$	M_2	μ_1	$\mu_1 = \mu_2$	μ_2	i	a_1
18	30 Ari A 2 ^h 31 ^m .2 +24°13'	Adams, Joy 17±4 19	6,57; +2,72 +2,96	F5 +3,47 +3,71	+ 9,30 + 9,48	1,55 1,46	1,28 1,20	0,0113 0,343 0,330	19°,1 19°,5	3 013 9 208 9 027
19	Boss 613 2 ^h 36 ^m .2 +67°24'	Harper 13	5,84; +1,41	A2 +2,16	+ 5,84	2,18	1,76	0,044 0,715	27°,7	1 918 4 126
20	π Ari 2 ^h 43 ^m .7 +17°3'	Young 5	5,30; —1,21	B8 —0,46	+ 6,69	5,59	4,24	0,0061 0,615	10°,2	1 312 7 409
21	τ Per 2 ^h 47 ^m .2 +52°21'	Colacevich 18±10 26	4,06; R +0,34 +1,13	G1+A5 +1,09 +1,88	+ 1,81 + 2,36	3,16 2,46	2,49 1,97	0,337 2,01 1,73	54°,6 61°,8	268 900 329 887 305 121
22	5 Tau 3 ^h 25 ^m .4 +12°36'	Harper 17	4,28; +0,43	G7 +1,18	+ 5,18	3,78	2,94	0,0433 0,993	22°,8	99 955 257 984
23	β Ret 3 ^h 42 ^m .9 —65°7'	S. Jones 23	3,80; +0,61	G9 +1,36	+ 6,19	3,72	2,90	0,0259 0,810	19°,2	133 400 405 669
24	μ Per 4 ^h 7 ^m .6 +48°9'	Cannon 13±5 6	4,28; —0,15 —1,83	cG2 +0,60 —1,08	+ 1,97 + 0,70	4,10 7,87	3,16 5,79	0,2526 2,07 3,06	43°,1 34°,0	80 000 117 120 143 040
25	+16°577 4 ^h 11 ^m .9 +16°41'	Sanford 17	8,3; +4,45	G5 +5,20	+ 6,40	1,15	0,961	0,1166 0,730	51°,8	4 517 5 750
26	O Σ 82 A 4 ^h 17 ^m .1 +14°49'	Sanford 34±7 13 26	7,24; +4,90 +2,81 +4,31	F8 +5,65 +3,56 +5,06	+ 9,90 + 8,44 + 9,49	0,924 1,55 1,07	0,778 1,28 0,891	0,0913 0,308 0,420 0,336	27°,6 23°,0 26°,3	1 980 4 273 5 067 4 469
27	63 Tau 4 ^h 17 ^m .7 +16°33'	Jantzen, Harper 16 27	5,68; +1,70 +2,84	A7s +2,45 +3,59	+ 6,01 + 6,83	1,97 1,45	1,61 1,20	0,0457 0,683 0,568	28°,9 32°,3	4 330 8 959 8 101
28	θ ² Tau 4 ^h 22 ^m .9 +15°39'	Plaskett 26±10 34	3,62; +0,69 +1,28	A7s +1,44 +2,03	+ 3,95 + 4,35	2,66 2,23	2,13 1,81	0,0987 1,10 1,00	34°,7 37°,0	37 471 65 837 62 277
29	58 Per 4 ^h 29 ^m .7 +41°4'	Sanford 21±4 5	4,46; R +1,07 —2,05	cG2 +1,82 —1,30	 — 0,89	2,72 8,67	2,17 6,35	0,9965 5,38	58°,9	993 500 1160 408
30	88 Tau 4 ^h 30 ^m .2 +9°57'	Wilson 30±5 27	4,38; +1,77 +1,54	A3 +2,52 +2,29	+ 3,87 + 3,70	1,95 2,08	1,59 1,69	0,164 1,13 1,17	48°,1 46°,8	3 748 5 037 5 142
31	3 Cam A 4 ^h 32 ^m .0 +52°53'	Cannon 11	5,31; +0,52	G6 +1,27	+ 2,40	3,60	2,81	0,28 2,00	47°,4	46 900 63 737
32	τ Tau 4 ^h 36 ^m .2 +22°46'	Parker 10±15 9	4,33; —0,67 —0,90	B5n +0,08 —0,15	+ 5,97 + 5,75	4,95 5,37	3,77 4,10	0,0135 0,761 0,799	14°,0 13°,7	914 3 778 3 859
33	Boss 1131 4 ^h 42 ^m .8 +18°33'	Sanford 9±10 32	6,79; +1,56 +4,32	G1 +2,31 +5,07	+ 8,75 +10,9	2,30 1,10	1,86 0,922	0,0092 0,407 0,255	15°,8 20°,0	7 810 28 686 22 836
34	π ⁴ Ori 4 ^h 45 ^m .9 +5°26'	Baker 5	3,78; —2,73	B2s —1,98	+ 3,23	14,7	10,3	0,0172 1,66	10°,8	3 393 18 108

N°	Etoile $\alpha \left\{ \begin{array}{l} \delta \end{array} \right. 1900$	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{p^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a_1 \sin i$	
			$\overline{M_1}$	$\overline{M_1} = \overline{M_2}$	$\overline{M_2}$	$\overline{\mu_1}$	$\overline{\mu_1} = \overline{\mu_2}$	$\overline{\mu_2}$	i	$\overline{a_1}$
35	7 Cam 4 ^h 49 ^m .3 +53°35'	Harper 23	4,5;	A2s	+1,31 +2,06 +7,32	2,24	1,81	0,018 0,515	20°,0	1 877 5 488
36	103 Tau 5 ^h 2 ^m .0 +24°8'	Hill 4	5,50;	B3k	-1,49 -0,74 +0,92	7,78	5,72	0,280 3,15	35°,5	28 900 49 766
37	14 Aur A 5 ^h 8 ^m .8 +32°34'	Harper 18	5,3;	A7s	+1,58 +2,33 +10,23	2,04	1,66	0,0039 0,274	12°,2	1 123 5 314
38	5 Aur 5 ^h 26 ^m .2 +32°7'	Young 4	4,88;	cB3ss	-2,11 -1,36 -0,27	10,2	7,38	0,56 4,80	42°,2	182 300 271 445
39	5 ^h 1 Ori 5 ^h 29 ^m .3 +9°25'	Struve 3	4,53;	B0ssk	-3,08 -2,33 -1,05	20,3	14,0	0,6954 7,86	35°,7	54 000 92 556
40	5 ^h 30 Ori A 5 ^h 30 ^m .5 -5°29'	Struve 5	5,17;	O9k	R-1,34 -0,59 -0,33	12,3	8,79	1,604 7,89	64°,2	27 000 29 997
41	5 ^h 30 Ori 5 ^h 30 ^m .5 -5°59'	Plaskett, Harper 21±11	2,87;	O8sk	R-0,52 +0,23 +0,56	11,0	7,91	1,3394 6,92	61°,5	30 560 34 777
42	Boss 1381 5 ^h 32 ^m .4 -64°18'	Lunt 6±9	5,30;	G8	-0,81 -0,06 +2,40	6,20	4,63	0,1344 2,07	29°,2	47 900 98 195
43	125 Tau 5 ^h 33 ^m .5 +25°50'	Cannon 5	5,00;	B3	-1,51 -0,76 +3,96	7,84	5,77	0,0280 1,32	15°,6	8 160 30 347
44	Boss 1399 5 ^h 35 ^m .8 -1°11'	Plaskett, Harper 6	5,00;	B3	-1,11 -0,36 +0,34	6,66	4,95	0,6067 3,84	52°,0	22 380 28 400
45	1 Gem 5 ^h 58 ^m .0 +23°16'	Young 27±7 30	4,30;	G5	+1,46 +2,21 +11,8 +1,69 +2,44 +12,0	2,60 2,43	2,08 1,95	0,0015 0,229 0,218	8°,2 8°,3	1 510 10 587 10 460
46	6 ^h 1 Ori 6 ^h 1 ^m .9 +14°47'	Harper 6	4,40;	B3s	-1,71 -0,96 +0,77	8,55	6,27	0,2773 3,32	34°,2	49 270 87 651
47	45 Aur 6 ^h 13 ^m .6 +53°30'	Harper 24	5,41;	F4	+2,31 +3,06 +7,85	1,71	1,41	0,0216 0,465	23°,1	2 837 7 232
48	8 Col 6 ^h 18 ^m .4 -33°23'	S. Jones 15±8 22	3,98;	G1	-0,14 +0,61 +4,73 +0,69 +1,44 +5,46	3,99 3,01	3,09 2,38	0,0405 1,00 0,843	21°,9 24°,1	91 120 244 293 223 153
49	7 Pup 6 ^h 47 ^m .5 -50°30'	S. Jones 25	2,83;	G8	-0,18 +0,57 +7,35	4,84	3,69	0,0078 0,614	11°,7	60 500 298 326
50	A Car 6 ^h 47 ^m .6 -53°30'	Wilson, Huffer 15	4,38;	G3	+0,26 +1,01 +1,90	3,63	2,83	0,313 2,16	49°,6	66 880 87 813
51	+25°1594 7 ^h 3 ^m .5 +25°54'	Sanford 29±9 30	7,01;	G6	+4,32 +5,07 +7,26 +4,40 +5,15 +7,30	1,20 1,18	1,01 0,988	0,0705 0,610 0,605	40°,7 41°,2	12 383 18 996 18 797

N°	Étoile $\alpha \quad \delta \quad 1900$	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu_2^2 \sin^2 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a, \sin i$	
			M_1	$M_1 = M_2$	M_2	μ_1	$\mu_1 = \mu_2$	μ_2	i	a_i
52	γ CMi 7 ^h 22 ^m ,8 +9°8'	11 Christie 15±5	4,60; +0,48 -0,19	K4 +1,23 +0,56	+ 2,71 + 2,20	5,01 6,52	3,81 4,86	0,26 2,36 2,76	40°,4 36°,8	94 400 145 659 157 554
53	σ Pup 7 ^h 26 ^m ,1 -43°6'	Wilson 12±11 20	3,27; -1,33 -0,22	M0 -0,58 +0,53	+ 1,92 + 2,87	13,6 8,25	9,70 6,07	0,164 3,61 2,65	24°,1 28°,4	64 800 158 695 136 274
54	α^1 Gem 7 ^h 28 ^m ,2 +32°6'	Curtis, Luyten 73±3 75	2,85; R +2,17 +2,23	A8s +2,92 +2,98	+ 9,12 + 9,18	1,74 1,71	1,43 1,40	0,0097 0,348 0,343	17°,4 17°,5	1 279 4 277 4 254
55	α^2 Gem 7 ^h 28 ^m ,2 +32°6'	Curtis, Luyten 73±3 75	1,99; R +1,31 +1,37	A3s +2,06 +2,12	+11,6 +11,6	2,22 2,19	1,80 1,77	0,0015 -0,206 0,204	8°,6 8°,7	1 485 9 930 9 817
56	σ Gem 7 ^h 37 ^m ,0 +29°7'	Harper 18±6 22	4,26; +0,54 +0,97	K1p +1,29 +1,72	+ 4,32 + 4,69	4,11 3,53	3,17 2,76	0,0812 1,33 1,21	27°,9 29°,4	9 220 19 703 18 781
57	ε Vol 8 ^h 7 ^m ,6 -68°19'	Sanford 11	4,46; -0,33	B8 +0,42	+ 1,08	4,03	3,12	0,437 2,53	55°,5	12 999 15 768
58	ι Hya 8 ^h 19 ^m ,6 -3°26'	Sanford 38±10 36	5,67; +3,57 +3,45	F2 +4,32 +4,20	+11,5 +11,5	1,22 1,26	1,02 1,05	0,0045 0,210 0,214	15°,2 15°,0	650 2 479 2 512
59	Σ 1245 A 8 ^h 30 ^m ,5 +6°58'	Joy, Abetti 41±5 38	6,04; +4,10 +3,94	F6 +4,85 +4,69	+ 9,80 + 9,69	1,10 1,14	0,918 0,953	0,015 0,309 0,316	23°,7 23°,4	4 300 10 698 10 827
60	ε Hya C 8 ^h 41 ^m ,5 +6°47'	Sanford 14	7,5; +3,23	F7 +3,98	+ 8,62	1,38	1,15	0,0206 0,402	24°,5	3 700 8 921
61	+8°2134 8 ^h 46 ^m ,8 +8°26'	Sanford 17±8 29	6,59; +2,74 +3,90	dG1 +3,49 +4,65	+ 8,79 + 9,65	1,59 1,18	1,31 0,986	0,0154 0,392 0,326	21°,1 23°,3	3 436 9 545 8 686
62	H Vel 8 ^h 53 ^m ,3 -52°20'	Neubauer 5	4,77; +1,74	B5 +2,49	+ 9,15	2,22	1,80	0,0081 0,379	15°,3	534 2 024
63	w Vel 8 ^h 56 ^m ,3 -40°52'	Lunt 26±9	4,42; +1,49	F8 +2,24	+ 5,98	2,24	1,81	0,0433 0,721	27°,3	18 130 39 523
64	α Cnc 9 ^h 2 ^m ,4 +11°4'	Ichinoe 8	5,14; -0,34	B8 +0,41	+ 2,12	4,05	3,13	0,200 1,87	39°,4	5 890 9 277
65	75 Cnc 9 ^h 2 ^m ,9 +27°3'	Sanford 42±6 50	5,96; +4,08 +4,45	G3 +4,83 +5,20	+ 9,85 +10,1	1,20 1,10	1,01 0,922	0,0157 0,331 0,315	23°,3 24°,1	5 296 13 388 12 970
66	16 UMa 9 ^h 6 ^m ,4 +61°50'	Young 42±5 58	5,23; +3,35 +4,05	F9 +4,10 +4,80	+ 6,48 + 6,92	1,36 1,15	1,14 0,959	0,07 0,654 0,593	38°,7 41°,5	7 730 12 360 11 665
67	α Car 9 ^h 8 ^m ,4 -58°33'	Curtis 13	3,56; -0,87	B3s -0,12	+ 3,36	6,04	4,53	0,066 1,54	22°,7	1 960 5 078
68	23 Hya 9 ^h 11 ^m ,7 -5°56'	S. Jones 19±8 8	5,40; +1,79 -0,08	K4 +2,54 +0,67	+ 5,43 + 3,80	3,15 6,25	2,48 4,66	0,0832 1,14 1,73	30°,8 24°,4	121 000 236 313 292 941

N°	Etoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu^3 \sin^3 i}{(\mu_1 + \mu_2)^3}$			$a, \sin i$	
			$\underline{M}_1$	$\underline{M}_1 = \underline{M}_2$	$\underline{M}_3$	$\underline{\mu}_1$	$\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2$	$\underline{\mu}^2$	$\underline{i}$	$\underline{a}_1$
69	α Vel 9 ^h 19 ^m .0 —54°35'	Curtis 17	2,63; —1,22	B3 —0,47	— 0,36	6,96	5,15	1,15 4,96	74°,4	73 200 75 982
70	m Vel 9 ^h 47 ^m .8 —46°5'	S. Jones 1±8	4,56; —5,44	G5 —4,69	— 1,31	54,1	35,7	0,0953 7,05	12°,7	63 700 289 771
71	19 LMi 9 ^h 51 ^m .6 +41°32'	Harper 43	5,19; +3,36	F5 +4,11	+11,9	1,31	1,09	0,0034 0,198	13°,4	1 943 8 384
72	λ Hya 10 ^h 5 ^m .7 —11°52'	S. Jones 14±9 17	3,83; —0,44 —0,02	G9 +0,31 +0,73	+ 6,98 + 7,40	5,47 4,68	4,16 3,58	0,0084 0,677 0,617	11°,5 12°,2	80 800 405 293 382 346
73	30H UMa 10 ^h 16 ^m .9 +66°4'	Schlesinger 15	4,92; +0,80	A0 +1,55	+ 5,66	2,65	2,12	0,0376 0,756	24°,4	5 020 12 153
74	3 LMi 10 ^h 32 ^m .2 +34°36'	Christie 5	6,65; +0,14	K2 +0,89	+ 4,64	5,01	3,81	0,054 1,27	22°,5	145 000 378 885
75	ω UMa 10 ^h 48 ^m .2 +43°43'	Parker 13	4,84; R +0,41	A0 +1,16	+ 7,11	3,01	2,38	0,0130 0,547	16°,2	4 336 15 540
76	H.D. 96511 11 ^h 2 ^m .2 +82°17'	Sanford 13±10 30	7,06; +2,63 +4,45	dG3 +3,38 +5,20	+ 5,16 + 6,32	1,65 1,04	1,35 0,875	0,1111 0,884 0,678	43°,8 52°,9	9 975 14 414 12 509
77	ξ UMa B 11 ^h 12 ^m .9 +32°6'	Berman 138±6 94 136±12	4,87; +5,57 +4,74 R +5,54	dG0 +6,32 +5,49 +6,29	...	0,792 0,959 0,798	0,668 0,807 0,673	0,0000 0,000 0,000	0°,0 0°,0 0°,0	276
78	ξ UMa A 11 ^h 12 ^m .9 +32°6'	Van den Bos 138±6 94 136±12	4,41; +5,11 +4,28 R +5,08	dG0 +5,86 +5,03 +5,83	+ 9,83 + 9,30 + 9,83	0,881 1,07 0,887	0,742 0,898 0,747	0,0214 0,312 0,350 0,312	29°,2 27°,2 29°,1	62 200 127 510 136 094 127 883
79	Σ 1561 B 11 ^h 33 ^m .5 +45°40'	Sanford 54±6 38	8,6; +7,26 +6,50	dK5 +8,01 +7,25	+10,5 +10,1	0,627 0,743	0,531 0,628	0,0343 0,309 0,342	39°,5 37°,1	7 806 12 271 12 942
80	+43°2135 11 ^h 33 ^m .7 +42°52'	Sanford 52	8,4; +6,98	K5 +7,73	+10,9	0,832	0,701	0,0316 0,352	34°,4	5 090 9 009
81	93 Leo 11 ^h 42 ^m .8 +20°46'	Cannon 29±10 45	4,54; +1,85 +2,81	F4 +2,60 +3,56	+ 4,21 + 4,81	1,95 1,50	1,59 1,24	0,1392 1,06 0,918	44°,9 50°,0	26 170 37 083 34 152
82	+17°2402 11 ^h 44 ^m .1 +16°48'	Petrie 12	5,95; +1,35	A3 +2,10	+ 8,57	2,20	1,78	0,009 0,392	15°,8	1 184 4 349
83	Boss 3102 11 ^h 44 ^m .5 +35°29'	Harper 27	5,76; +2,92	F5 +3,67	+ 4,53	1,47	1,21	0,1750 0,989	56°,5	16 787 20 128
84	θ^2 Cru 11 ^h 59 ^m .2 —62°36'	Grattan 5	4,98; —1,53	B3 —0,78	+ 3,18	7,91	5,82	0,0482 1,62	18°,6	2 420 7 587

N°	Etoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu_a \sin^2 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a, \sin i$	
			$\underline{M_1}$	$\overline{M_1} = \underline{M_2}$	$\overline{M_2}$	$\underline{\mu_1}$	$\underline{\mu_2} = \underline{\mu_3}$	$\underline{\mu_3}$	$\underline{i}$	$\underline{a_1}$
85	4 Com 12 ^h 6 ^m ,7 +26°25'	Harper 7	5,81; -0,04	K4 +0,71	+ 3,20	6,14	4,59	0,1326 2,04	29°,2	89 032 182 516
86	4H Dra 12 ^h 7 ^m ,5 +78°10'	Lee 26±5 28	5,12; +2,19 +2,36	A5 +2,94 +3,11	+ 6,94 + 7,07	1,72 1,64	1,41 1,35	0,0333 0,554 0,538	27°,1 27°,6	1 104 2 423 2 382
87	+27°2138 12 ^h 23 ^m ,7 +26°47'	Harper 13	6,48; +2,05	A3 +2,80	+ 5,14	1,80	1,47	0,0855 0,835	38°,0	6 674 10 839
88	ε Cen 13 ^h 1 ^m ,1 -49°22'	Neubauer 7	4,40; -1,37	B3 -0,62	+ 2,82	7,41	5,46	0,038 1,42	17°,6	3 680 12 170
89	Boss 3511 13 ^h 30 ^m ,3 +37°42'	Harper 19±6 36	4,96; +1,35 +2,74	F2 +2,10 +3,49	(+15,0) (+16,2)	2,22 1,51	1,80 1,25	0,0002 0,102 0,079	4°,3 4°,9	222 2 961 2 599
90	1 Cen 13 ^h 40 ^m ,0 -32°33'	S. Jones 46±7 42	4,36; +2,67 +2,48	F0 +3,42 +3,23	(+16,2) (+16,0)	1,53 1,61	1,26 1,32	0,0002 0,080 0,082	4°,9 4°,8	795 9 307 9 501
91	M Cen 13 ^h 40 ^m ,4 -50°56'	S. Jones 14±8 12	4,68; +0,41 +0,08	G5 +1,16 +0,83	+ 4,14 + 3,84	3,66 4,12	2,86 3,18	0,0818 1,24 1,34	29°,0 27°,9	73 200 151 012 156 428
92	ν Cen 13 ^h 43 ^m ,5 -41°11'	Wilson 7	3,53; -2,24	B2 -1,49	+ 6,75	11,6	8,28	0,0024 0,707	6°,1	745 7 011
93	h Cen 13 ^h 47 ^m ,5 -31°26'	Paddock 6	4,76; -1,35	B7 -0,60	+ 6,42	6,09	4,56	0,0065 0,664	10°,2	1 984 11 204
94	η Boo 13 ^h 49 ^m ,9 +18°54'	Bianchi 101	2,80; +2,82	F7 +3,57	+ 8,04	1,53	1,26	0,0242 0,455	25°,1	53 101 125 159
95	α Dra 14 ^h 1 ^m ,7 +64°51'	Harper 11±5 26	3,64; -1,15 +0,71	A0p -0,40 +1,46	+ 0,52 + 1,78	5,21 2,73	3,96 2,18	0,4156 2,90 1,98	48°,5 66°,0	30 173 40 281 33 039
96	Boss 3644 14 ^h 8 ^m ,5 -0°22'	Duncan 23±7 22	5,81; +2,62 +2,52	F4 +3,37 +3,27	+11,0 +11,0	1,58 1,62	1,30 1,33	0,0040 0,237 0,240	13°,3 13°,3	902 3 921 3 921
97	4 UMi 14 ^h 9 ^m ,2 +78°1'	Young 13	5,00; +0,57	K4 +1,32	+ 3,98	4,84	3,69	0,11 1,65	29°,5	91 300 185 430
98	A Boo 14 ^h 13 ^m ,8 +35°58'	Young 15	4,83; +0,71	K1 +1,46	+ 4,55	3,86	3,00	0,076 1,25	27°,7	44 000 94 644
99	+22°2731 14 ^h 35 ^m ,8 +22°24'	Harper 25	6,17; +3,16	F1 +3,91	+ 6,28	1,35	1,12	0,0695 0,648	38°,9	26 086 41 529
100	2H UMi 14 ^h 56 ^m ,0 +66°20'	Young 12±5 8	4,86; +0,26 -0,62	M5 +1,01 +0,13	+ 6,02 + 5,01	8,75 13,0	6,40 9,27	0,023 1,31 1,70	14°,0 12°,4	68 800 284 419 320 402
101	+33°2574 15 ^h 15 ^m ,4 +32°54'	Christie 14	6,14; +1,87	A3 +2,62	+ 5,27	1,90	1,54	0,0741 0,811	35°,3	2 865 4 959

N°	Etoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu^2 \sin^2 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a, \sin i$	
			$\underline{M_1}$	$\underline{M_1} = \underline{M_2}$	$\underline{M_2}$	$\underline{\mu_1}$	$\underline{\mu_1} = \underline{\mu_2}$	$\underline{\mu_2}$	$\underline{i}$	$\underline{a_1}$
102	ϵ Lib 15 ^h 18 ^m ,8 —9°53'	R. Jones 28±6 33	5,08; +2,32 +2,67	F3 +3,07 +3,42	+7,53 +7,81	1,70 1,55	1,40 1,28	0,0255 0,496 0,467	24°,7 25°,4	32 037 76 665 74 678
103	+47°22'27" 15 ^h 25 ^m ,6 +47°35'	Christie 11	5,96; +1,17	A3 +1,92	+7,52	2,32	1,87	0,015 0,491	18°,4	16 210 51 353
104	25 Ser 15 ^h 40 ^m ,9 —1°29'	Jordan 7	5,37; —0,40	B8 +0,35	+2,68	4,14	3,20	0,133 1,61	33°,4	17 170 31 198
105	θ Dra 16 ^h 0 ^m ,0 +58°50'	Curtis 46±5 58	4,11; +2,42 +2,93	F7 +3,17 +3,68	+10,9 +11,3	1,71 1,49	1,40 1,23	0,0041 0,250 0,228	13°,1 13°,8	990 4 368 4 150
106	H.D. 144515 16 ^h 1 ^m ,2 +10°57'	Sanford 22±6 24	8,5; +5,21 +5,40	K0 +5,96 +6,15	+9,93 +10,1	1,04 0,990	0,869 0,832	0,0244 0,362 0,351	28°,8 29°,3	2 238 4 646 4 572
107	Boss 4129 16 ^h 8 ^m ,1 +36°41'	Christie 7	5,68; —0,09	K4 +0,66	+1,55	6,27	4,68	0,4895 3,41	48°,4	384 050 513 475
108	ζ TrA 16 ^h 17 ^m ,6 —69°52'	S. Jones 86±8	4,93; +4,60	G0 +5,35	(+16,2)	1,02	0,855	0,0005 0,085	7°,6	1 320 9 981
109	i TrA 16 ^h 18 ^m ,7 —63°50'	S. Jones 24±8	5,30; +2,20	F3s +2,95	+3,73	1,76	1,44	0,213 1,18	57°,1	20 380 24 273
110	21 Her 16 ^h 19 ^m ,3 +7°10'	Harper 9	5,72; +0,49	A1n +1,24	+10,9	2,90	2,31	0,0014 0,240	7°,7	953 7 112
111	β Her 16 ^h 25 ^m ,9 +21°42'	Plummer 15±5 26	2,81; —1,31 —0,12	G5 —0,56 +0,63	+3,27 +4,37	7,05 4,43	5,21 3,40	0,0519 1,55 1,17	20°,0 23°,1	60 280 176 259 153 654
112	32 Her A 16 ^h 29 ^m ,6 +30°43'	Mk Kellar 8	6,66; +1,18	F0 +1,93	+4,06	2,32	1,87	0,112 1,08	38°,4	3 181 5 121
113	μ^1 Sco 16 ^h 45 ^m ,1 —37°53'	Maury 11	3,09; R —1,70	B3nn —0,95		8,51	6,25			
114	19 Dra 16 ^h 55 ^m ,5 +65°17'	Harper 65±6 61	4,82; +3,88 +3,75	F6 +4,63 +4,50	+8,61 +8,53	1,16 1,19	0,966 0,998	0,0263 0,399 0,405	28°,5 28°,2	12 144 25 454 25 697
115	ϵ UMi 16 ^h 56 ^m ,2 +82°12'	Plaskett 15±10 10	4,40; +0,28 —0,60	G1 +1,03 +0,15	+3,19 +2,50	3,45 4,72	2,70 3,60	0,1337 1,46 1,76	35°,6 32°,0	17 346 29 800 32 732
116	α Her B 17 ^h 10 ^m ,1 +14°30'	Sanford 9	5,39; +0,16	F8 +0,91	+2,98	3,41	2,66	0,1395 1,48	36°,5	2 103 3 535
117	+34°29'71" 17 ^h 23 ^m ,2 +34°47'	Christie 11	5,91; +1,12	A2 +1,87	+8,22	2,37	1,90	0,0097 0,424	15°,9	2 041 7 450
118	H.D. 159082 17 ^h 27 ^m ,6 +12°0'	JW Campbell 5	6,18; —0,33	B9 +0,42	+3,31	3,95	3,06	0,0886 1,34	29°,2	4 680 9 594

N°	Étoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu_3 \sin^2 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a_1 \sin i$	
			$\overline{M_1}$	$\overline{M_1 = M_2}$	$\overline{M_3}$	$\overline{\mu_1}$	$\overline{\mu_1 = \mu_2}$	$\overline{\mu_3}$	$\overline{i}$	$\overline{a_1}$
119	ξ Ser 17 ^h 31 ^m .9 —15°20'	Young 28±6 50	3,64; +0,88 +2,13	A5 +1,63 +2,88	+11,0 +12,1	2,50 1,75	2,00 1,44	0,0017 0,232 0,185	8°,6 9°,6	610 4 079 3 658
120	ω Dra 17 ^h 37 ^m .5 +68°48'	Turner 39±6 39	4,87; +2,83	F4 +3,58	+7,88	1,49	1,23	0,0261 0,462	26°,1	2 632 5 983
121	Boss 4507 17 ^h 44 ^m .4 +47°39'	Harper 19	6,34; +2,73	A2 +3,48	+6,20	1,51	1,24	0,06 0,660	35°,3	2 336 4 044
122	70 Oph A 18 ^h 0 ^m .4 +2°31'	Berman 196±4 206	4,28; R +5,74 +5,85	dK0 +6,49 +6,60	(+15,0) (+15,1)	0,813 0,792	0,685 0,668	0,0016 0,111 0,109	12°,1 12°,2	119 660 570 612 565 947
123	ξ Pav 18 ^h 14 ^m .0 61°32'	S. Jones 19	4,25; R +0,64	M1 +1,39	...	5,97	4,48	1,188		526 000
124	105 Her 18 ^h 15 ^m .1 +24°24'	Harper 6	5,49; —0,62	K4 +0,13	+2,44	7,78	5,72	0,16 2,56	28°,8	96 904 201 173
125	Boss 4669 18 ^h 22 ^m .1 +29°46'	Young 13	5,71; +1,28	A4s +2,03	+7,48	2,24	1,81	0,016 0,494	19°,1	3 330 10 176
126	γ Dra 18 ^h 22 ^m .9 +72°41'	Crawford 119±8 115	3,69; +4,07 +3,99	F5 +4,82 +4,74	+6,04 +5,98	1,10 1,13	0,922 0,939	0,1104 0,698 0,708	51°,4 51°,1	60 170 77 018 77 318
127	60 Ser 18 ^h 24 ^m .5 —2°3'	Christie 11±10 14	5,44; +0,65 +1,17	G8 +1,40 +1,92	...	3,59 3,02	2,81 2,39	0,0000 0,00 0,00	0°,0 0°,0	154
128	ζ Lyr A 18 ^h 41 ^m .3 +37°30'	Jordan 25±6 24	4,29; +1,28 +1,19	A9s +2,03 +1,94	+5,20 +5,11	2,24 2,31	1,81 1,86	0,0601 0,824 0,841	30°,6 30°,4	3 030 5 951 5 987
129	β Sct 18 ^h 41 ^m .9 —4°51'	Young 18±6 6	4,47; +0,75 —1,64	cG7 +1,50 —0,89	+2,31 +0,63	3,39 8,47	2,65 6,22	0,33 2,08 3,53	52°,4 36°,6	178 000 224 636 298 506
130	112 Her 18 ^h 48 ^m .0 +21°18'	Meyer 9	5,33; +0,10	A0s +0,85	+8,96	3,34	2,61	0,0036 0,367	10°,1	1 537 8 764
131	$\circ$ Dra A 18 ^h 49 ^m .7 +59°16'	Young 2±5 14	4,78; —3,71 +0,51	G5 —2,96 +1,26	—0,43 +2,95	21,4 3,54	14,8 2,77	0,183 4,96 1,69	21°,5 39°,9	44 363 121 067 69 162
132	δ^1 Lyr 18 ^h 50 ^m .2 +36°51'	Jordan 4	5,51; —1,48	B3 —0,73	+0,81	7,74	5,70	0,309 3,27	37°,0	39 220 65 184
133	113 Her A 18 ^h 50 ^m .5 +22°31'	Wilson 11±7 17	4,56; —0,23 +0,71	G0 +0,52 +1,46	+3,21 +3,91	4,05 2,94	3,13 2,34	0,102 1,44 1,20	30°,5 31°,1	53 580 105 553 103 731
134	18 Aql 19 ^h 2 ^m .3 +10°55'	Jordan 8	5,10; —0,38	B8 +0,37	+8,88	4,11	3,17	0,0028 0,383	8°,8	494 3 229
135	Boss 4870 19 ^h 3 ^m .1 +41°16'	Boothroyd 3	6,15; —1,46	B3sk —0,71	+11,7	7,68	5,66	0,0002 0,233	3°,0	172 3 286

N°	Etoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu_1^2 \sin^2 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a_i \sin i$	
			M_1	$M_1 = M_2$	M_2	μ_1	$\mu_1 = \mu_2$	μ_2	i	a_i
136	+16°37'52 19°33'5 +16°43'	Albitzky 59±7 43	5,99; +4,84 +4,16	G4 +5,59 +4,91	+12,6 +12,1	1,03 1,21	0,861 1,01	0,0045 0,188 0,208	16°,0 15°,2	3 952 14 338 15 073
137	γ Sgr 19°16'0 —16°8'	Wilson 3	4,58; R —3,03	B3+A2 —2,28	— 1,97	13,3	9,44	1,582 8,20	61°,2	91 010 103 842
138	ϕ Aql 19°51'5 +11°9'	Harper 19±6 16	5,29; +1,68 +1,31	A2 +2,43 +2,06	+ 7,69 + 7,37	2,00 2,24	1,64 1,81	0,0176 0,475 0,509	20°,5 19°,8	1 694 4 836 5 001
139	θ^1 Sgr 19°53'2 —35°33'	Wilson, Huffer 8	4,39; —1,09	B5 —0,34	+ 9,85	5,82	4,39	0,0009 0,326	5°,3	460 4 980
140	Σ 2613 A 19°56'6 +10°28'	Sanford 13	7,5; +3,07	F4 +3,82	+11,8	1,40	1,16	0,0032 0,201	12°,9	2 526 11 314
141	22 Vul 20°11'2 +23°12'	Harper 3±6 3	5,38; —2,23	cG4 —1,48	— 0,34	10,0	7,29	0,5112 4,65	40°,9	93 072 142 121
142	ω Cyg 20°12'3 +47°24'	Cannon 7±5 6	4,16; —1,61 —1,95	cK5 —0,86 —1,20	+ 0,45 + 0,19	13,4 15,8	9,53 11,1	0,53 5,51 6,12	37°,4 35°,1	263 250 433 310 457 792
143	β Cap 20°15'4 —15°6'	S. Jones 6±7 39	3,25; —2,86 R +1,21	F8 —2,11 +1,96	— 1,65	11,3 2,43	8,08 1,95	1,177 6,69 ...	56°,6	382 500 458 235
144	α Pav 20°17'7 —57°3'	Curtis 14	2,12; —2,15	B3s —1,40	+ 9,39	10,4	7,50	0,0005 0,384	3°,6	1 170 18 633
145	ι Del 20°33'0 +11°2'	Harper 17	5,43; +1,58	A2s +2,33	+ 7,48	2,06	1,68	0,019 0,497	20°,9	3 846 10 780
146	H.D. 199579 20°53'1 +44°33'	Plaskett 3	6,01; R —1,60	O6k —0,85	+ 1,28	36,5	24,6	0,374 8,88	23°,1	28 076 71 566
147	+57°23'09 ab 21°14'6 +58°10'	Sanford 3	6,41; —1,20	B3ek —0,45	+ 3,96	6,91	5,11	0,0353 1,32	17°,5	2 960 9 845
148	H.R. 8170 21°17'2 +39°55'	Plaskett 41	6,46; +4,52	F8 +5,27	+ 6,92	1,02	0,849	0,0810 0,585	46°,5	2 773 3 824
149	+18°47'94 21°21'8 +18°58'	Harper 21	6,06; +2,67	A3 +3,42	+ 4,46	1,52	1,25	0,1607 0,979	53°,2	12 382 15 465
150	γ Oct 21°30'4 —77°50'	Colacevich 68±11 27	3,74; +2,90 +0,90	K0 +3,65 +1,65	+ 6,99 + 5,37	1,88 3,46	1,53 2,71	0,050 0,688 0,997	30°,5 24°,7	110 400 217 488 264 187
151	42 Cap 21°36'1 —14°30'	S. Jones 32±6 46	5,28; +2,81 +3,59	G1 +3,56 +4,34	+ 8,76 + 9,35	1,62 1,32	1,33 1,10	0,0164 0,406 0,358	21°,5 22°,9	4 130 11 271 10 614
152	γ Peg A 21°40'1 +25°11'	Luyten 24±5 37	4,8; +1,70 +2,64	F2 +2,45 +3,39	+ 6,05 + 6,76	2,00 1,55	1,64 1,28	0,045 0,685 0,585	28°,6 31°,3	3 430 7 165 6 603

N°	Etoile α δ 1900	Auteur de l'orbite Parallaxe	m; type spectral			$\frac{\mu^2 \sin^2 i}{(\mu_1 + \mu_2)^2}$			$a_1 \sin i$	
			M_1	$M_1 = M_2$	M_2	μ_1	$\mu_1 = \mu_2$	μ_2	i	a_1
153	32 Aqr 21 ^h 59 ^m ,6 —1°23'	A. Farnsworth, R. Jones 10±6 19	5,23; +0,23 +1,62	A8s +0,98 +2,37	+13,3 (+14,6)	3,10 2,02	2,45 1,65	0,0003 0,145 0,109	4°,5 5°,1	735 9 368 8 268
154	H.R. 8427 22 ^h 2 ^m ,0 +47°45'	Young 3	6,16; —1,45	B3k —0,70	+ 0,37	7,65	5,64	0,47 3,79	43°,9	3 810 5 494
155	Peg 22 ^h 2 ^m ,4 +24°51'	Curtis 77±6 74	3,96; +3,39 +3,31	F3 +4,14 +4,06	+ 5,50 + 5,46	1,29 1,32	1,07 1,09	0,117 0,780 0,787	49°,3 48°,9	6 740 8 890 8 944
156	α Tuc 22 ^h 11 ^m ,7 —60°45'	S. Jones 14±10 24	2,91; —1,36 —0,19	K5 —0,61 +0,56	+ 2,13 + 3,14	11,9 7,14	8,51 5,27	0,1295 3,03 2,22	385 100 23°,1 27°,5	981 620 834 127
157	Boss 5900 22 ^h 48 ^m ,2 +16°19'	Harper 8	5,72; +0,24	K1 +0,99	+ 3,87	4,58	3,51	0,094 1,49	28°,3	11 254 23 735
158	π Cep A 23 ^h 4 ^m ,7 +74°51'	Harper 2±6 16	4,7; —3,79 +0,72	G1 —3,04 +1,47	— 1,69	19,1 2,98	13,2 2,36	0,6228 7,26	35°,0	168 970 294 515
159	Gru 23 ^h 4 ^m ,7 —45°47'	S. Jones 26±9 15	4,10; +1,17 —0,02	G5 +1,92 +0,73	+ 5,71 + 4,72	2,85 4,28	2,27 3,29	0,0462 0,855 1,08	57 900 25°,7 22°,4	133 517 151 930
160	λ And 23 ^h 32 ^m ,7 +45°55'	Burns 37±7 44	4,00; +1,84 +2,22	G7 +2,59 +2,97	+13,4 +13,8	2,40 2,14	1,92 1,74	0,0007 0,166 0,154	1 990 6°,5 6°,7	17 580 17 056
161	+27°46'42 23 ^h 49 ^m ,9 +28°6'	Sanford 39±6 33	7,30; +5,26 +4,89	G8p +6,01 +5,64	+11,0 +10,8	0,891 0,971	0,750 0,816	0,0125 0,253 0,267	3 552 24°,0 23°,2	8 734 9 015

65. Remarques.

Les remarques ci-après ont pour objet de compléter les valeurs numériques du Tableau en indiquant les particularités relatives à quelques étoiles, spécialement lorsque la solution habituelle ($U_2 = U_1$) ne s'applique pas. On s'est attaché à donner des renseignements au moins qualitatifs sur les masses et sur l'inclinaison dans les cas douteux ou mal-déterminés et à comparer s'il y a lieu les résultats issus de la relation masse-luminosité avec les valeurs provenant d'autres modes d'investigation.

Les étoiles sont désignées par leur numéro d'ordre dans le Tableau.

n° 6. Composante la plus brillante d'un système triple discuté par LUYTEN qui, avec une parallaxe $p=50$, calcule la masse

$$\mu_A = \mu_1 + \mu_2 = 1,27$$

en bon accord avec les masses obtenues ici. Adoptant la moyenne des 2 bornes, on aurait en effet $\mu_1 = 1,02$ environ pour $p=50$. La masse du compagnon, $\mu_A - \mu_1$, serait égale à 0,25, donc de l'ordre de μ_2 , ce qui laisserait présumer une forte inclinaison.

n° 21. Spectre composite. On a adopté pour U la moyenne des valeurs correspondant aux types G1 et A5.

n° 29. Avec $p=21$, l'hypothèse $U_2=U_1$ ne peut être maintenue. Les valeurs imposées par la fonction des masses et la relation d'EDDINGTON sont :

$$U_2 \leq -1,15, \quad \mu_2 \geq 2,97.$$

n° 40. $p=5$ est une parallaxe trigonométrique absolue (MAC CORMICK). La correction U pour le type spectral Ogh est tirée de l'échelle des températures de KUIPER (*Astroph. Journ.*, vol. 88, n° 4, nov. 1938, p. 446). En attribuant aux 2 composantes le type spectral B1 (Harvard), on est pratiquement dans le cas limite défini par :

$$\begin{aligned} U_1 &= -0,74, & 8,32 < \mu_1 < 6,12 \\ U_2 &\leq -0,80, & \mu_2 > 6,27, & i = 90^\circ. \end{aligned}$$

n° 41. Même remarque pour le type spectral O8sh. Mêmes caractéristiques générales que le n° 40 quant aux masses et à l'inclinaison.

n°s 54 et 55. Castor B et Castor A. MOORE indique les éléments suivants, d'après LUYTEN et RABE :

$$p=68, \quad \mu_A + \mu_B = 5,5, \quad \mu_A = 3,2, \quad \mu_B = 2,3.$$

Ces valeurs s'accordent avec celles que nous obtenons pour $p=73$ en adoptant les masses moyennées entre les bornes, soit :

$$\begin{aligned} \text{pour Castor B : } & \mu_1 = 1,58, \quad \mu_2 = 0,89, \quad \mu_1 + \mu_2 = 2,47; \\ \text{pour Castor A : } & \mu_1 = 2,01, \quad \mu_2 = 1,00, \quad \mu_1 + \mu_2 = 3,01. \end{aligned}$$

n° 75. De l'observation des 2 spectres, PARKER déduit le rapport des masses, $\mu_2/\mu_1 = 0,17$; mais le spectre de la 2^e composante n'a pas été toujours mis en évidence, notamment dans les spectrogrammes de Victoria (HARPER). Avec

$$\mu_1 = (\bar{\mu}_1 + \underline{\mu}_1)/2 = 2,70 \quad \text{et} \quad \mu_2 = 0,17\mu_1 = 0,46,$$

μ_2 est à peine inférieur au minimum $\mu_2 = 0,55$ issu de la fonction des masses : on peut considérer les 2 résultats comme compatibles et en déduire une inclinaison voisine de 90° .

n°s 77 et 78. A partir des éléments visuels et spectroscopiques du système A,B, BERMAN détermine la parallaxe $p = 136 \pm 12$ et la masse totale $\mu_A + \mu_B = 2,27$. Or, les masses individuelles des composantes de chacun des couples spectroscopiques A et B sont ici (en adoptant toujours la moyenne des valeurs extrêmes calculées) :

$$\begin{aligned} \text{pour } \xi \text{ UMa B : } & \mu_1 = 0,736, \quad \mu_2 = 0,337; \quad \text{d'où : } \mu_B = 1,07; \\ \text{pour } \xi \text{ UMa A : } & \mu_1 = 0,817, \quad \mu_2 = 0,530; \quad \text{d'où : } \mu_A = 1,35. \end{aligned}$$

Par conséquent : $\mu_A + \mu_B = 2,42$. L'accord est remarquable entre la valeur orbitale et le résultat issu de la relation masse-luminosité.

n° 113. Orbite relative, qui laisse indéterminés la fonction des masses et le demi-grand axe minimum, mais fait connaître la *masse totale* minima et la *distance* minima des composantes, soit :

$$(\mu_1 + \mu_2) \sin^3 i = 16,5, \quad (a_1 + a_2) \sin i = 9\,534\,000 \text{ km.}$$

En remplaçant $\mu_1 + \mu_2$ par $\overline{\mu_1 + \mu_2}$, on a une valeur minima de $\sin^3 i$. Et comme $\overline{\mu_1 + \mu_2} = 14,8$, on peut poser pratiquement $\sin^3 i = 1$ et $i = 90^\circ$. Ce résultat, qu'il faut interpréter comme un renseignement qualitatif (forte inclinaison) s'accorde avec la remarque de MOORE, d'après laquelle le couple serait une variable à éclipses.

n° 122. Première composante d'un couple visuel A, B. D'après l'orbite visuelle de PAVEL et avec $p = 200$, la masse de la composante A serait :

$$\mu_A = \mu_1 + \mu_2 = 1,09,$$

tandis que la relation masse-luminosité donne, avec $p = 196$ et en prenant la moyenne des valeurs bornes :

$$\mu_1 = 0,749, \quad \mu_2 = 0,398, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1,15.$$

Ici encore, on notera l'accord frappant entre la valeur observée et celle qu'on déduit de la relation d'EDDINGTON.

n° 123. Les données sont incompatibles avec la relation masse-luminosité appliquée aux 2 composantes si $U_2 = U_1$, mais on est aux voisinage du cas limite : il faut prendre $U_2 \leq -1,99$ et $\mu_2 \geq 4,62$. Les masses des 2 composantes seraient à peu près égales et l'inclinaison voisine de 90° .

n° 137. Spectre composite. On a adopté pour U la moyenne des valeurs correspondant aux types spectraux B3 et A2. D'ailleurs, spectre complexe et mal précisé : MOORE indique également B8p, F2p. (Harvard) et Av2 d'après MERRILL.

n° 143. Cas d'impossibilité avec $p = 39$ et $U_2 = U_1$. On doit prendre $U_2 \leq -1,43$ et $\mu_2 \geq 3,11$, c'est-à-dire $\mu_2 > \mu_1$. Signalons le désaccord entre les parallaxes et le spectre de la composante principale voilé par celui du compagnon.

n° 146. Type spectral O. Pour la correction U , voir la remarque relative à l'étoile n° 40.

n° 158. Avec $p = 16$ et $U_2 = U_1$, cas d'impossibilité très proche du cas limite. Il faut prendre $U_2 \leq -0,16$ et $\mu_2 \geq 2,43$. Comme $\mu_1 = 2,36$, on peut admettre que les bornes $\underline{\mu_1}$, $\underline{\mu_2}$ et $\underline{\mu_2}$ coïncident, et poser : $\mu_2 = 2,4$, $i = 90^\circ$.

CHAPITRE III

COUPLES A DEUX SPECTRES OBSERVÉS PARALLAXE MAXIMA ET PARALLAXE MOYENNE.

§ 1. — Méthode.

66. Équations du problème.

Considérant une étoile double spectroscopique dont on a observé les spectres des deux composantes, nous supposons connus: les masses minima

$$(61) \quad \mu_1 \sin^3 i = Q_1, \quad \mu_2 \sin^3 i = Q_2,$$

la magnitude apparente visuelle totale m et les types spectraux, c'est-à-dire les termes U_1 et U_2 qui serviront à appliquer la relation d'EDDINGTON; soit, avec les mêmes notations qu'au Chapitre II:

$$\mu_1 = f(M_1 + U_1), \quad \mu_2 = f(M_2 + U_2).$$

Les autres équations du problème sont les relations (17) et (23), déjà utilisées (nos 33 et 35). On a six équations et sept inconnues, μ_1 , μ_2 , M_1 , M_2 , i et p .

67. Parallaxe maxima.

Prenons la relation d'EDDINGTON sous la forme $M + U = \varphi(\mu)$, φ étant la fonction inverse de f , que nous savons *décroissante*. Aux masses minima Q_1 et Q_2 correspondent des valeurs *maxima*, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ respectivement, des magnitudes absolues visuelles M_1 et M_2 des composantes:

$$(62) \quad \mathcal{M}_1 = \varphi(Q_1) - U_1, \quad \mathcal{M}_2 = \varphi(Q_2) - U_2,$$

et, d'après (23), une valeur maxima, $\mathcal{M}$, de la magnitude absolue visuelle totale M :

$$\mathcal{M} = -2,5 \log (10^{-0,4\mathcal{M}_1} + 10^{-0,4\mathcal{M}_2}).$$

Enfin, la relation (17) qui définit la parallaxe p comme une fonction croissante de M , fournit la *parallaxe maxima* $\mathcal{P}$:

$$(63) \quad \log \mathcal{P} = -0,2 (m - \mathcal{M}) - 1.$$

68. Remarque sur l'application de la relation masse-luminosité.

Les résultats précédents se rattachent au problème de la détermination des éléments orbitaux μ_1 , μ_2 , etc. par la relation masse-luminosité, quand on connaît la parallaxe ⁽¹⁾. Les

(1) G. DURAND, *Annales Obs. Toulouse*, t. XI, 1935, p. 217.

équations sont les mêmes qu'ici, mais la solution dépend d'une *condition de possibilité*, équivalente à $p \leq \mathcal{P}$. Dans le cas actuel, nous admettons que la relation d'EDDINGTON s'applique toujours; elle n'apporte, par l'inégalité précédente, qu'une condition restrictive à l'ensemble des parallaxes possibles: *quel que soit le problème envisagé*, l'inégalité $p \leq \mathcal{P}$ (ou toute autre équivalente) doit être considérée comme une condition de *compatibilité* entre les éléments qui caractérisent un couple spectroscopique et la relation masse-luminosité. Ainsi, les cas d'impossibilité rencontrés dans le Mémoire cité de M. G. DURAND, signifient que les parallaxes observées sont supérieures à la parallaxe maxima calculée $\mathcal{P}$, sans qu'il soit possible de discerner si c'est la relation d'EDDINGTON ou les données de l'observation qui sont en défaut.

69. Calcul pratique de $\mathcal{P}$.

On détermine d'abord $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ par la relation d'EDDINGTON, puis on utilise les variables réduites x et y définies par (24). Posant

$$\mathcal{M}_1 - \mathcal{M} = x, \quad \mathcal{M}_2 - \mathcal{M} = y, \quad \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1 = y - x = \delta,$$

une Table, qui donne deux quelconques des quantités x , y et $y - x$ en fonction de la troisième, fait connaître x et y avec δ comme argument: on a donc $\mathcal{M}$. Enfin, $\mathcal{P}$ s'obtient sans effort par (17) à l'aide d'une Table des modules de distance.

On peut aussi calculer $\mathcal{M}$ directement, au moyen des *logarithmes d'addition*, dont la Table fournit $\log [1 + (1/\alpha)]$ en fonction de $\log \alpha$. Soit C le logarithme additif qui correspond à l'argument $0,4\delta$, on a:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - 2,5 C.$$

70. Exemple numérique.

Soit l'étoile *39 Bootis B* (n° 13 du Tableau des applications qui terminent ce Chapitre). Les données de l'observation sont:

$$m = 6,82. \quad Q_1 = 1,27, \quad Q_2 = 1,03, \quad \text{types spectraux: F5 et F5.}$$

On calcule les arguments

$$\lambda_1 = \log Q_1 = 0,104, \quad \lambda_2 = \log Q_2 = 0,013,$$

et la Table de la relation d'EDDINGTON, $\log \mu = \lambda(M + U)$, donne:

$$\mathcal{M}_1 + U_1 = 3,68, \quad \mathcal{M}_2 + U_2 = 4,54.$$

D'autre part, $U_1 = U_2 = +0,19$ (Table du terme U); d'où:

$$\mathcal{M}_1 = 3,49, \quad \mathcal{M}_2 = 4,35.$$

On a $\delta = \mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1 = 0,86 = y - x$, et la Table des x , y , $y - x$, fournit immédiatement $x = 0,41$ et $y = 1,26$; de sorte que

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - x = 3,08, \quad \mathcal{M}_2 - y = 3,09,$$

ce dernier résultat ayant surtout la valeur d'un contrôle, parce que la détermination de y à partir de $y - x$ est moins précise que celle de x .

Avec $\mathbb{M}=3,08$, d'où $m-\mathbb{M}=3,74$, la Table des modules de distance donne par simple lecture la parallaxe maxima cherchée, soit, avec l'unité habituelle (millième de seconde d'arc), $\mathcal{P}=18$.

Afin d'établir une comparaison, nous avons emprunté cet exemple aux Applications numériques du Mémoire de M. G. DURAND, (*loc. cit.*, p. 232). On y trouve deux valeurs observées de la parallaxe, $p=14$ et 20, dont la première, inférieure à $\mathcal{P}$, a effectivement permis le calcul des éléments orbitaux, tandis que la seconde donnait lieu à un cas d'impossibilité.

71. Cas particulier.

Par convention, Q_1 et Q_2 désignent respectivement la plus forte et la plus faible des masses minima. On a donc $\varphi(Q_1) < \varphi(Q_2)$; et comme les termes U_1 et U_2 , petits en valeur absolue (n° 34), sont en général égaux ou peu différents⁽²⁾, on a aussi :

$$\varphi(Q_1) - U_1 < \varphi(Q_2) - U_2,$$

c'est-à-dire $\mathbb{M}_1 < \mathbb{M}_2$, de sorte que la composante la plus massive est également la plus brillante. La différence δ étant *positive* comme l'argument $y-x$ de la Table qui donne x et y , on conduit le calcul ainsi qu'il est indiqué au n° 69.

Il arrive cependant (et c'est là un cas très particulier) que l'on trouve $\mathbb{M}_1 > \mathbb{M}_2$, ce qui s'écrit encore :

$$\varphi(Q_2) - \varphi(Q_1) < U_2 - U_1.$$

Le premier membre étant positif, on voit que l'éventualité $\mathbb{M}_1 > \mathbb{M}_2$ exige $U_2 > U_1$; encore se souviendra-t-elle que si la différence $\varphi(Q_2) - \varphi(Q_1)$ est suffisamment petite, c'est-à-dire si le rapport des masses Q_1/Q_2 est voisin de l'unité, avec des types spectraux assez différents. On adopte alors l'écart positif $\delta = \mathbb{M}_1 - \mathbb{M}_2 = y - x$ pour calculer $\mathbb{M}$, en spécifiant que c'est la composante de *moindre masse* qui est visuellement la plus brillante.

72. Influence des erreurs d'observation.

Les parallaxes déterminées dans ce Chapitre ayant seulement une valeur indicative (parallaxe maxima) ou statistique (parallaxe moyenne, que nous calculerons), il serait superflu de s'attacher à exprimer les erreurs sur les résultats en fonction des erreurs sur chaque donnée au moyen de formules précises. Bien que de telles formules soient relativement simples, on constate comme au Chapitre II que leur utilisation pratique demanderait plus de temps qu'un nouveau calcul des inconnues avec les données corrigées. Nous laisserons donc de côté les erreurs parfois importantes telles que ΔQ_1 et ΔQ_2 , provenant par exemple de la substitution à une orbite ancienne, d'une orbite récente plus précise, et nous nous bornerons à évaluer $\Delta \mathbb{M}$ et $\Delta \mathcal{P}$ en fonction des seules erreurs ΔU_1 et ΔU_2 : outre qu'une

(2) L'identité ou la proximité des types spectraux est très fréquente chez les couples à 2 spectres observés.

incertitude sur les types spectraux demeure fréquente, il est facile d'obtenir une *limite supérieure* de ΔM .

Les formules (62), où Q_1 et Q_2 restent inchangés, donnent :

$$\Delta M_1 = -\Delta U_1 \quad \text{et} \quad \Delta M_2 = -\Delta U_2; \quad \text{d'où:} \quad \Delta M = -\Delta U_1 - \Delta x.$$

Il suffit d'évaluer Δx en fonction de $\delta = y - x$ et de $\Delta \delta$. On trouve :

$$\Delta x = 2,5 \log [\beta + (1 - \beta) 10^{-0,4x}], \quad \text{avec:} \quad \beta = 10^{-0,4\Delta \delta}$$

et le calcul montre que $|\Delta x|$ n'atteint pas $|\Delta U_1 - \Delta U_2|$ ⁽³⁾. La limite supérieure de $|\Delta x|$ est $2,5 \log [(1 + \beta)/2]$.

Cas particuliers. — 1° Les résultats précédents subsistent quand Q_1 et Q_2 subissent de petites variations ΔQ_1 et ΔQ_2 telles que le rapport des masses Q_1/Q_2 reste constant : il suffit de pouvoir traiter la fonction d'EDDINGTON, $\lambda(G)$, comme *linéaire* dans chacun des intervalles (G_1, G_2) et $(G_1 + \Delta G_1, G_2 + \Delta G_2)$ avec le même coefficient angulaire α .

2° Si les types spectraux des composantes sont identiques, on a souvent $\Delta U_1 = \Delta U_2$. Alors, $\beta = 1$ et $\Delta x = 0$. L'erreur ΔM est indépendante de x , c'est-à-dire du rapport des masses.

Erreur relative sur $\mathcal{P}$. — On l'obtient par la formule (63). Comme l'erreur Δm est en général négligeable devant ΔM , on a :

$$\Delta \mathcal{P}/\mathcal{P} = 10^{0,2\Delta M} - 1.$$

73. Parallaxe moyenne.

Remplaçons $\sin^3 i$ par sa valeur moyenne θ_0 dans les équations (61). On obtient les *masses hypothétiques*

$$\mu_1 = Q_1/\theta_0, \quad \mu_2 = Q_2/\theta_0,$$

dont nous avons précisé les conditions d'emploi au Chapitre I (n° 31). Rappelons que les masses ainsi calculées ont une *valeur statistique*, bien qu'elles ne représentent pas des masses probables (n° 28). En leur appliquant la relation masse-luminosité, on en déduit des valeurs hypothétiques des magnitudes et de la parallaxe, par les mêmes formules qu'au n° 67, soit :

$$\begin{aligned} M_1 &= \varphi(Q_1/\theta_0) - U_1, & M_2 &= \varphi(Q_2/\theta_0) - U_2, \\ M_0 &= -2,5 \log (10^{-0,4M_1} + 10^{-0,4M_2}), \\ (64) \quad \log p_0 &= -0,2(m - M_0) - 1. \end{aligned}$$

Dans la pratique, on substituera $\theta_0 = 4,7 = 0,57$ (n° 29); d'où, successivement :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda(M_1 + U_1) = \log Q_1 + 0,244, & \lambda_2 &= \lambda(M_2 + U_2) = \log Q_2 + 0,244, \\ \delta_0 &= M_2 - M_1 = y_0 - x_0, & M_0 &= M_1 - x_0 = M_2 - y_0, \end{aligned}$$

enfin p_0 par la formule (64).

Nous appellerons cette parallaxe p_0 *parallaxe moyenne* ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ Le calcul de Δx figure dans le Mémoire de M. G. DURAND (*loc. cit.*, p. 221). Les erreurs s'expriment par les mêmes formules dans les deux problèmes; seule diffère la valeur numérique de x , qui correspond ici au cas particulier $\sin^3 i = 1$.

⁽⁴⁾ Quoique *hypothétique* soit plus adéquat, nous adoptons *parallaxe moyenne*, dans le sens très général de *issue d'une valeur moyenne*. Cela, afin d'éviter toute confusion avec *parallaxe hypothétique* qui appartient à la terminologie classique pour désigner des parallaxes calculées par d'autres méthodes.

74. Précision de la parallaxe moyenne.

Pour caractériser la précision de la parallaxe p_0 , nous calculerons l'erreur relative $\Delta p/p_0$ qui correspond à l'écart probable, $\Delta\theta = \pm 0,2$, sur θ_0 (n° 27). A parler strict, Δp ne représente pas une erreur probable, car l'importance numérique de $\Delta\theta$ ne permet pas *a priori* de traiter la fonction $p(\theta)$ comme linéaire dans l'intervalle $(p_0, p_0 + \Delta p)$. Nous aurons toutefois un ordre de grandeur; ce qui suffit, vu le caractère hypothétique de p_0 .

Soient $\lambda_1 = \log(Q_1/\theta_0)$ et $\lambda_2 = \log(Q_2/\theta_0)$. Exprimons d'abord les accroissements $\Delta\lambda_1$ et $\Delta\lambda_2$ en fonction de θ_0 et $\Delta\theta$, puis substituons les valeurs numériques; on trouve sans difficulté :

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 = -\log[1 + (\Delta\theta/\theta_0)] = -0,13 \text{ (pour } \Delta\theta > 0) \text{ ou } +0,19 \text{ (pour } \Delta\theta < 0).$$

On calcule ensuite ΔM_1 , ΔM_2 et ΔM en utilisant la forme *linéarisée* de la relation d'EDDINGTON (n° 33), qui donne :

$$\Delta\lambda = G\Delta\alpha + (\alpha + \Delta\alpha)\Delta G.$$

Cette formule, appliquée aux valeurs particulières $G_1 = M_1 + U_1$ et $G_2 = M_2 + U_2$ définies au n° 73, et avec $\Delta G_1 = \Delta M_1$, $\Delta G_2 = \Delta M_2$, fournit :

$$\Delta M_1 = (\Delta\lambda_1 - G_1\Delta\alpha_1)/(\alpha_1 + \Delta\alpha_1), \quad \Delta M_2 = (\Delta\lambda_2 - G_2\Delta\alpha_2)/(\alpha_2 + \Delta\alpha_2).$$

Il serait illusoire de rechercher une grande précision : on supposera la relation d'EDDINGTON linéaire dans l'intervalle contenant les valeurs G_1 , G_2 , $G_1 + \Delta M_1$ et $G_2 + \Delta M_2$. Dans ces conditions, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\Delta\alpha_1$ et $\Delta\alpha_2$ sont nuls, et comme $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2$,

$$\Delta\delta = \Delta M_2 - \Delta M_1 = 0, \quad \Delta x = \Delta M_1 - \Delta M = 0;$$

d'où :

$$\Delta M = \Delta M_1 = \Delta M_2 = \Delta\lambda/\alpha,$$

$\Delta\lambda$ désignant la valeur commune $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2$ et α la valeur moyenne de $\alpha(G)$ dans l'intervalle considéré. On connaît donc ΔM et finalement l'erreur relative sur la parallaxe :

$$\Delta p/p_0 = 10^{0,2\Delta M} - 1.$$

Le Tableau ci-après donne les valeurs numériques de $\Delta p/p_0$ pour les magnitudes courantes :

M =	-4		0		+4		+8	
Signe de $\Delta\theta$	+	-	+	-	+	-	+	-
$\Delta p/p_0 =$	+0,39	-0,37	+0,49	-0,44	+0,62	-0,50	+0,71	-0,54

On voit que l'erreur $\Delta p/p_0$, du signe de Δ , est un peu plus grande en valeur absolue quand $\Delta\theta$ est *positif* que pour la valeur opposée. De plus, elle croît lentement avec la magnitude absolue. *En moyenne*, on peut estimer les parallaxes p_0 comme affectées d'une erreur « probable » de l'ordre de 50 p. cent.

Cette erreur paraît forte à première vue. Mais il est essentiel de souligner qu'il s'agit d'une erreur *relative* sur des parallaxes presque toujours *faibles*. Ainsi, dans nos applications numériques, nous avons 93 p. cent des parallaxes $p_0 < 10$, dont 63 p. cent sont < 5 . La moyenne des p_0 atteint à peine 4 et l'erreur *absolue* probable reste de l'ordre de ± 2 . En définitive, les parallaxes p_0 sont au moins aussi précises que certaines parallaxes trigonométriques faibles ou négatives, qu'on sait affectées d'une forte erreur probable, parfois supérieure à 100 p. cent.

75. Valeurs exceptionnelles de p_0 . Cas des faibles inclinaisons.

Il arrive parfois qu'on trouve des valeurs de $\mathcal{L}$ et p_0 inacceptables parce que trop élevées ($p_0 > 1''$). Si l'on n'a aucune raison de suspecter l'application de la relation masse-luminosité, ces valeurs exceptionnelles de p_0 mettent en évidence une orbite à faible inclinaison, une très forte erreur par excès sur la parallaxe provenant alors d'une erreur négative importante sur l'inclinaison.

Considérons en effet, dans les formules (61), des valeurs décroissantes de i . Les masses μ_1 et μ_2 croissent indéfiniment et, d'après la loi masse-luminosité, les magnitudes absolues M_1 et M_2 tendent vers $-\infty$. Soient p la parallaxe vraie et $\Delta p = p - p_0$, on a :

$$p/p_0 = 10^{0,2\Delta M}.$$

L'erreur ΔM due à Δp varie de 0 à $-\infty$, et l'on voit que p/p_0 tend à s'annuler avec i , de sorte que p_0 croît au-delà de toute limite.

Exemple (*). — Soit le couple 55 UMa. Avec : $m=4,78$, $Q_1=0,123$, $Q_2=0,085$, $U_1=U_2=+0,28$, on trouve $\mathcal{L}=6'',6$ et $p_0=1'',9$. Ces résultats dépourvus de réalité physique montrent que l'inclinaison doit être petite, très inférieure à la valeur $i_0=56^\circ$ qui correspond à p_0 . De fait, l'inclinaison calculée par la relation d'EDDINGTON atteint à peine 21° , tandis que la parallaxe observée vaut $0'',014$. L'erreur $\Delta i = -35^\circ$ entraîne sur la parallaxe une erreur considérable, $\Delta p = -1'',9$.

76. Masses minima calculées et inclinaison maxima.

A défaut d'un renseignement quantitatif sur la parallaxe, nous n'avons obtenu jusqu'ici qu'une indication qualitative sur l'inclinaison. La relation masse-luminosité permet beaucoup plus ; elle détermine en effet :

a. De nouvelles masses minima, plus fortes que les masses hypothétiques issues de θ_0 (n° 73) et a fortiori que les masses minima observées Q_1 et Q_2 ;

b. Une inclinaison maxima, inférieure à $i_0=56^\circ$.

Il suffit de se donner une parallaxe maxima empirique $\omega < p_0$ et d'inverser le problème. Les données sont m, Q_1, Q_2, U_1, U_2 et ω ; les inconnues M_1, M_2, μ_1, μ_2 et i ; on retrouve le problème traité par M. G. DURAND. La solution détermine successivement M, x, y, μ_1, μ_2, i , par les formules :

$$\begin{aligned} M &= m + 5 + 5 \log \omega, \\ (65) \quad \lambda(M + U_1 + x) - \lambda[M + U_2 + y(x)] &= \log(Q_1/Q_2), \\ \log \mu_1 &= \lambda(M + U_1 + x), \quad \log \mu_2 = \lambda(M + U_2 + y), \\ \sin^3 i &= Q_1 \mu_1 = Q_2 \mu_2; \end{aligned}$$

mais ici, la donnée ω est une valeur arbitraire commune à tous les couples de ce cas particulier : il n'y a pas lieu de s'astreindre à une grande précision numérique. On peut notam-

(*) Emprunté à M. G. DURAND, *Annales Obs. Toulouse*, t. XI, 1935, p. 230.

ment se permettre une simplification dans la résolution de l'équation (65), qui s'effectue d'ordinaire par la méthode des substitutions ⁽⁶⁾: supposant la relation d'EDDINGTON linéaire au voisinage de M, on adopte la valeur correspondante du coefficient α (G) (n° 33) et l'on a, d'après (65):

$$y-x=U_1-U_2-(1/\alpha) \log (Q_1/Q_2);$$

avec $y-x$ comme argument, la Table des $x, y, y-x$ fournit x et y par une simple lecture.

Choix de la parallaxe maxima ϖ . Exemple. — Pour choisir ϖ , on peut s'appuyer sur les parallaxes observées des couples à 1 et 2 spectres connus, dont la répartition statistique est la suivante:

p (en 0",001)	0	10	20	30	40	50
fréquences { 1 spectre	28	29	19	7	6	11
(en pour cent) { 2 spectres	22	46	22	5	3	2

Ces parallaxes sont faibles. Il est à présumer que celles dont nous nous occupons ici sont plus faibles encore, puisqu'elles sont restées jusqu'à présent inaccessibles aux méthodes usuelles d'observation. On peut adopter pratiquement $\varpi=50$. Mais le calcul montre que les résultats seraient peu modifiés si l'on choisissait d'autres valeurs, même assez différentes de celle que nous proposons, et que l'on considérerait comme plus précises ou plus sûres. Qu'il nous suffise de citer par exemple l'étoile 55 *UMa* (cf. n° 75). Avec $\varpi=30, 50$ et 70 , on a respectivement les masses minima $\mu_1=1,6, 1,2$ et $1,1$, et les inclinaisons maxima $25^\circ, 28^\circ$ et 29° . Les masses minima calculées sont dix fois supérieures aux valeurs observées, tandis que les inclinaisons maxima restent voisines de l'inclinaison réelle, quoique issues de parallaxes bien plus fortes: d'où l'intérêt de ces déterminations.

§ 2. — Applications numériques.

77. Parmi les étoiles doubles spectroscopiques dont on connaît l'orbite, rares sont les couples sur la parallaxe desquels on n'a aucun renseignement. Ainsi, sur 87 systèmes à 2 spectres visibles du *Fourth Catalogue of spectroscopic binary stars* de J.H. MOORE (1936), il en est 10 à peine qui ne figurent pas dans le *General Catalogue of stellar parallaxes* de F. SCHLESINGER (1935). Mais on ne saurait limiter les applications de la méthode aux seules étoiles dépourvues de parallaxe. La détermination de $\mathcal{F}$ et p_0 reste intéressante même quand on dispose d'une ou plusieurs parallaxes mesurées, certaines d'entre elles pouvant donner lieu à une impossibilité du calcul des éléments orbitaux par la relation masse-luminosité (nos 68 et 70). Tel est le cas de 20 couples spectroscopiques, dans le Mémoire cité de M. G. DURAND (*Annales Obs. Toulouse*, t. XI, 1935, p. 227-235): aussi les avons-nous insérés dans le Tableau ci-après, marqués d'un astérisque (*) afin de les distinguer des 10 couples sans parallaxe indiqués plus haut. On pourrait étendre d'ailleurs le calcul de $\mathcal{F}$ et p_0

(*) G. DURAND, *loc. cit.*, p. 215.

à la totalité des binaires spectroscopiques à 2 spectres visibles, et l'on dégagerait d'intéressantes remarques d'une comparaison systématique des parallaxes observées avec les valeurs issues de la relation masse-luminosité. Une étude approfondie de la question dépasserait le cadre de notre sujet et nous ne pouvons l'aborder ici : nous nous sommes donc borné à quelques remarques individuelles (indiquées par la lettre R) comme à la fin du Chapitre II.

Les nombres du Tableau ont à peine besoin d'explication. Précisons seulement que l'avant-dernière colonne contient, après les masses minima (données de l'observation) les *masses hypothétiques* μ_1 et μ_2 calculées avec $\sin^3 i = 4/7$ (n° 73). La dernière colonne fait connaître les *parallaxes maxima et moyenne* en millièmes de seconde.

N°	Etoile	1900		Auteur de l'orbite	m	Types spectraux	Masses			Parallaxe	
		α	δ				$\mu_1 \sin^3 i$; $\mu_2 \sin^3 i$	μ_1 ; μ_2	ϖ	P_0	
1	+57°28	0	6,3 + 57°39	Pearce	7,08	cB9sek B5n	113,2 ; 44,9	198 ; 78,6	0,1	0,1	
2	o Per ^h R	3	38,0 + 31 58	Jordan	3,94	B1 (B1)	5,42 ; 3,79	9,49 ; 6,63	12	6	
3	$\Sigma 674$ A*	5	11,6 + 20 1	Sanford	6,84	F5 (F5)	1,404 ; 1,328	2,46 ; 2,32	13	5	
4	H.D. 44701	6	18,0 — 3 14	Pearce	6,58	B5n B8n	6,2 ; 4,1	10,8 ; 7,2	2	1	
5	+6°1309 R	6	32,0 + 6 13	Plaskett	6,06	O8ek (O8ek)	75,6 ; 63,3	132 ; 111	0,6	0,4	
6	19 Lyn* R	7	14,7 + 55 28	Pearce	5,61	B8 (B8)	4,3 ; 2,3	7,5 ; 4,0	6	3	
7	H.D. 61859*	7	36,2 + 34 14	Harper	6,00	F3 F3	1,53 ; 1,32	2,68 ; 2,31	18	7	
8	Boss 3138*	11	55,8 — 19 6	Van Arnem	5,28	B3 B3	8,22 ; 4,40	14,3 ; 7,7	4	2	
9	H.D. 107760*	12	17,9 + 73 48	Sanford	8,2	G5 G5	6,803 ; 0,704	1,41 ; 1,23	29	10	
10	32 Vir*	12	40,7 + 8 13	Cannon	5,24	A5 A5	4,64 ; 2,37	8,12 ; 4,15	5	3	
11	32 Cam*	12	48,3 + 83 58	Plaskett	5,81	Ao Ao	2,47 ; 2,08	4,32 ; 3,64	9	4	
12	3 Boo*	13	42,1 + 26 12	Petrie	5,91	F5 F5	2,34 ; 1,92	4,09 ; 3,36	9	4	
13	39 Boo B* R	14	46,3 + 49 8	Harper	6,82	F5 F5	1,27 ; 1,03	2,22 ; 1,80	18	7	
14	ζ^* CrB*	15	35,6 + 36 58	Plaskett	5,07	B8 B8	13,35 ; 13,06	23,4 ; 22,9	2	1	
15	σ^* CrB* R	16	10,9 + 34 7	Harper	5,76	F8 F8	1,07 ; 0,94	1,87 ; 1,64	40	15	
16	H.D. 149632	16	30,9 + 17 15	Young	6,27	Ao Ao	2,19 ; 1,35	3,83 ; 2,36	10	4	
17	Boss 4444	17	28,1 — 32 31	Trumpler	5,17	Oe5 Oe5	13,90 ; 13,90	24,3 ; 24,3	7	4	
18	+14°3329	17	39,8 + 14 27	Petrie	6,13	A3p A3p	1,83 ; 1,63	3,20 ; 2,85	12	5	
19	+65°1276	18	31,0 + 65 22	Petrie	6,31	A3 A3	1,97 ; 1,87	3,45 ; 3,27	9	4	
20	205 Dra*	18	45,0 + 49 19	Sanford	7,18	F2 F2	1,48 ; 1,47	2,59 ; 2,57	10	4	
21	—10°4926	18	57,1 — 10 52	Pearce	6,68	B8 B8	7,10 ; 4,43	12,4 ; 7,75	1	2	
22	H.D. 178619*	19	4,2 + 16 42	Harper	6,46	F5 F5	1,26 ; 1,26	2,20 ; 2,20	18	7	
23	+37°3413	19	15,5 + 37 16	Harper	6,19	Ao Ao	1,18 ; 0,84	2,06 ; 1,47	29	11	
24	Boss 5026*	19	36,4 + 54 44	Harper	5,86	F5 F5	1,46 ; 1,44	2,55 ; 2,52	19	7	
25	O Σ 398 A	20	3,6 + 35 26	Plaskett	(7,7)	Bok Bok	13,85 ; 12,90	24,3 ; 22,6	0,7	0,4	
26	18 Vul* R	20	6,4 + 26 36	Harper	5,46	A2 A2	2,27 ; 2,06	3,97 ; 3,60	11	5	
27	Boss 5629*	21	48,8 + 55 20	Pearce	6,1	B7 B8	20,8 ; 13,6	36,4 ; 23,8	0,8	0,5	
28	Boss 5846*	22	34,8 — 9 53	Sanford	6,74	Go Go	1,468 ; 1,376	2,57 ; 2,41	14	6	
29	Boss 6142* R	23	50,5 + 56 51	Young	6,05	Bo Bo	18,5 ; 12,7	32,3 ; 22,2	1,3	0,8	
30	Boss 6148* R	23	52,1 + 55 9	Harper	5,69	F5 F5	1,704 ; 1,671	2,98 ; 2,92	16	6	

78. Remarques individuelles.

La plupart de ces remarques se rapportent à la parallaxe. Nous désignons par t , s et d respectivement, les valeurs trigonométriques, spectroscopiques et dynamiques que nous comparons à $\mathfrak{P}$ et p_0 .

n° 2. Le type spectral de la 2^e composante n'est pas explicité dans le Catalogue de MOORE : d'une manière générale, nous adoptons alors pour la 2^e composante le spectre attribué à la 1^{re}, et l'écrivons entre parenthèses. — La parallaxe maxima $\mathfrak{P}=12$ coïncide avec la moyenne des valeurs $t=18\pm6$ et $s=6$, tandis que $p_0=6$ s'accorde avec s et $d=5,0$.

n° 5. Pour le terme U relatif au type spectral O, on s'est servi de l'échelle des températures de KUIPER (*Astrophys. Journ.*, vol.88, n° 4, 1938, p.446). — Les valeurs issues de la relation masse-luminosité manquent de précision parce que U est important et les masses très élevées. Néanmoins, p_0 s'accorde avec la parallaxe $p=0,34$ obtenue par PLASKETT (7).

n° 6. Les parallaxes publiées sont concordantes et voisines de $\mathfrak{P}$. On a $t=10\pm7$, $s=7$, $d=6,6$, ce qui laisse présumer une inclinaison voisine de 90° .

n° 13. $\mathfrak{P}$ coïncide sensiblement avec la moyenne des valeurs $s=26$ et $d=12$.

n° 15. Le Catalogue de SCHLESINGER (1935) indique des parallaxes assez discordantes, mais dont les valeurs déduites, $t=48\pm7$, $s=34$, $d=50$, s'accordent avec $\mathfrak{P}$. Il s'agit vraisemblablement d'un couple à forte inclinaison.

n° 26. La parallaxe $s=13$, qui conduisait à un cas d'impossibilité (G. DURAND, *loc. cit.*, p. 234) ne figure pas dans le Catalogue de SCHLESINGER de 1935. On y trouve par contre la valeur $t=-2\pm6$, compatible avec la relation d'EDDINGTON.

n° 29. Les parallaxes mesurées sont discordantes: $t=28\pm10$ et $s=2$. Avec l'orbite plus récente de SANFORD (*Astrophys. Journ.*, t. 83, 1936, p. 121) on trouve $\mathfrak{P}=1,7$ et $p_0=1,0$. L'amélioration de l'orbite entraîne un accord plus satisfaisant entre la valeur eddingtonienne $\mathfrak{P}$ et la détermination spectroscopique.

n° 30. Pas de parallaxe trigonométrique; les mesures spectroscopiques, assez concordantes, donnent $s=18$, valeur voisine de $\mathfrak{P}$. Probablement, couple à forte inclinaison.

(7) J.S. Plaskett, *A very massive star* (*Monthly Notices*, t. 82, 1922, p. 447).

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LES MÉTHODES DE L'ASTRONOMIE PHOTOGRAPHIQUE DE POSITION

Vu et approuvé :

Paris, le 5 Décembre 1945.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. MONTEL.

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

G. ROUSSY.

